



PISA en el Aula: Matemáticas

PISA en el Aula: **Matemáticas**

PISA EN EL AULA: MATEMÁTICAS

Coordinación editorial:

Miguel Á. Aguilar R.
Antonio Lojero Ruaro

Diseño y formación:

Juan Cristóbal Ramírez Peraza
Francisco López López

**INSTITUTO NACIONAL PARA LA EVALUACIÓN
DE LA EDUCACIÓN**

José Ma. Velasco 101 - 5º. Piso, Col. San José Insurgentes,
Delegación Benito Juárez, México, 03900, D.F.

Primera edición 2008

El contenido, la presentación, así como la disposición en conjunto y de cada página de esta obra son propiedad del editor. Se autoriza su reproducción parcial o total por cualquier sistema mecánico, electrónico y otros, citando la fuente.

Impreso en México

ISBN: 978-607-7675-04-4.



CONTENIDO

Presentación	5
Introducción	11
1. Algunos factores que influyen en el aprendizaje	15
2. Descripción del proyecto PISA y la Competencia matemática	27
Descripción del proyecto PISA	29
Definición de la Competencia matemática	30
3. Propuestas didácticas para el desarrollo de la Competencia matemática	37
Propuesta didáctica para <i>Cantidad</i>	
<i>Propuesta de Rosario Licea García</i>	39
Propuestas didácticas para <i>Cambio y relaciones</i>	
<i>Propuesta de Demetrio Garmendia Guerrero</i>	71
<i>Propuesta de Eduardo Mancera Martínez</i>	87
Propuesta didáctica para <i>Probabilidad</i>	
<i>Propuesta de Teresa Fonseca Cárdenas</i>	127
Anexos	153
I. Análisis de unidades de reactivos	
El carpintero	155
<i>Teresa Fonseca Cárdenas</i>	
Pasos	158
<i>Rosario Licea García</i>	
Exportaciones	164
<i>Eduardo Mancera Martínez</i>	
II. Acerca de los autores	169



PRESENTACIÓN

Los sistemas educativos de muchos países del mundo son objeto hoy día de monitoreos periódicos, mediante proyectos de evaluación de alcance nacional e internacional. La información derivada de esos proyectos es vasta y valiosa para la toma de decisiones. Una de las evaluaciones más conocidas actualmente es la llamada PISA (por las siglas en inglés del nombre *Programme for International Student Assessment*), de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). Dada su regularidad, rigor técnico, confiabilidad y alcance, sus resultados son esperados en los países participantes y no participantes como insumos importantes de información para establecer políticas públicas que tengan efectos en la mejora de la calidad educativa.

PISA también puede ser útil para los docentes, pero conseguir que lo sea efectivamente es un desafío para quienes tienen el encargo de difundir los resultados, pues es necesario hacer que el proyecto sea asimilado y aprovechado en las aulas, como una herramienta que permita que los estudiantes alcancen habilidades y aprendizajes más complejos, no memorísticos ni rutinarios, mediante la intervención educativa de quienes, día a día, están frente a los grupos.

Ese reto fue aceptado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). En 2005, una vez que los resultados nacionales de PISA 2000 y 2003 fueron dados a conocer, la Dirección de Proyectos Internacionales y Especiales del Instituto (DPIE) se dio a la tarea de preparar un material de difusión titulado *PISA para Docentes* (versión impresa y multimedia) dirigido a profesores de educación secundaria y media superior. Su objetivo fue acercar PISA a los docentes, mediante la presentación de ejemplos reales de las preguntas empleadas en PISA 2000 y 2003, en las áreas de Lectura, Matemáticas y Ciencias, que fueron difundidas por la OCDE para efectos de información.

La idea central de *PISA para Docentes* fue que, después de analizar las preguntas, los maestros y los estudiantes se dieran cuenta de que, para responderlas, se necesita de una adecuada capacidad analítica y de razonamiento. Esta obra tuvo un tiraje de 250 mil ejemplares, que fueron distribuidos a las Áreas Estatales de Evaluación de las 32 entidades federativas del país, para que los hicieran llegar a las escuelas de secundaria y media superior antes de la aplicación de PISA 2006.



La DPIE también organizó e impartió seis talleres para analizar, reflexionar y trabajar con ese material. Los talleres sólo pudieron atender a unos 150 profesores, pero la aceptación del material fue evidente y se reflejó en la solicitud de ejemplares de la obra, así como presentaciones y talleres adicionales. Los interesados en *PISA para Docentes* pueden acceder a la obra en el portal del INEE: www.inee.edu.mx

PISA EN EL AULA

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación persiste en su afán de ayudar a que los maestros puedan retroalimentar y reorientar su trabajo tomando en cuenta los resultados del ciclo de PISA 2006¹ que fueron dados a conocer en diciembre del 2007.

Esos resultados muestran que el rendimiento de los estudiantes mexicanos fue inferior al de los alumnos de los demás países de la OCDE, pero que también lo son el ingreso per cápita y otros indicadores del desarrollo económico y social de nuestro país.

Los resultados se explican, en parte, pues, porque muchos estudiantes tienen condiciones menos favorables para el aprendizaje que los de otros países de la OCDE, tanto en el hogar como en la escuela. Otros elementos que contribuyen a explicar esos resultados son el enfoque memorístico, los métodos de enseñanza obsoletos y la promoción de habilidades de rutina, que prevalecen, en muchos casos, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las escuelas mexicanas, públicas y privadas, a pesar de que los planes de estudio prescriban el desarrollo de habilidades más complejas.

A partir de los resultados de PISA, es claro que los esfuerzos educativos deberían tratar de reducir la proporción de estudiantes en los niveles más bajos y aumentarla en los niveles más altos, en las tres áreas de evaluación. Además de conseguir que a los 15 años todos los jóvenes mexicanos sigan en la escuela, esas deben ser, sin duda, las metas en el mediano y largo plazos. La pregunta es cómo conseguirlo. La respuesta deberá incluir tanto el establecimiento de políticas educativas que incidan en el sistema educativo, en el nivel macro, como acciones en pequeña escala, que hagan posible el cambio en cada escuela y cada aula.

Una inquietud que un profesor suele plantearse después de conocer los resultados de PISA es: ¿qué puedo hacer para que mis alumnos aprendan mejor? Esta pregunta fue la que animó a planear esta obra, como una herramienta didáctica que permita un trabajo analítico y reflexivo entre docentes, para propiciar que los estudiantes adquieran las competencias que PISA ha definido como relevantes para el desempeño personal y social en la sociedad del conocimiento.

No se puede negar el avance en el diseño de los planes de estudio, pero tampoco puede soslayarse la brecha existente entre lo prescrito en ellos y la práctica educativa. El INEE tiene la plena convicción de que el trabajo docente es sumamente importante; por ello, es indispensable apoyar a los maestros, en servicio y en formación, para que su práctica

¹M.A Díaz, G. Flores y F. Martínez Rizo (2007). *PISA 2006 en México*. México: INEE.



docente mejore de forma tal que, paulatinamente, enfrenten la tarea docente en forma más rica y no reproduciendo paradigmas en desuso.

El progreso en la mejora de la enseñanza puede beneficiarse mediante diferentes acciones de apoyo, que van desde la promoción de la reflexión y análisis de los planes de estudio y la práctica cotidiana, hasta la construcción de estrategias de enseñanza-aprendizaje aplicables e idóneas al contexto propio de los centros escolares. Buscando contribuir a la mejora de la enseñanza y, en especial, para lograr aprendizajes más complejos, en esta ocasión el INEE ofrece a los profesores una obra similar a la que produjo en 2005, pero ahora con un giro diferente. Este material se titula *PISA en el Aula* y tiene las siguientes características:

- Se dirige a profesores y formadores de docentes de secundaria. Se privilegia este nivel porque la población evaluada por PISA lo ha terminado recientemente o se encuentra todavía en él; por ello, si se quiere mejorar los resultados en PISA, hay que trabajar especialmente en el nivel que precede a la educación media superior.
- Incluye tres volúmenes, uno por área de PISA: Ciencias, Lectura y Matemáticas.
- Su contenido se centra en propuestas didácticas diseñadas por especialistas de cada área. Las propuestas buscan identificar y analizar tareas que un estudiante puede realizar, para adquirir y desarrollar competencias que le permitan resolver problemas de la vida real, a partir de situaciones del ámbito escolar. Con ello, los alumnos podrán transferir el aprendizaje a situaciones de tipo familiar, social y laboral, fortaleciendo procesos cognitivos complejos en áreas fundamentales para el aprendizaje escolar y para una mayor oportunidad de éxito académico, tomando como marco la reforma de secundaria y los referentes conceptuales de PISA.
- Incluye dos tipos de recomendaciones: unas buscan propiciar la colaboración, el intercambio de experiencias y la discusión entre profesores, para el conocimiento de PISA y para la mejora continua de los procesos educativos; otras pretenden promover la vinculación de la escuela con las familias, mediante actividades que den continuidad al trabajo en el salón de clases, pero en el ámbito del hogar.

Con *PISA en el Aula* no sólo se busca que los docentes estén familiarizados con aspectos técnicos de la evaluación; se pretende incidir directamente en su labor, con propuestas pedagógicas viables, recomendaciones para el trabajo con los pares y las familias, y sugerencias bibliográficas. Se trata, pues, de una obra diferente a *PISA para Docentes*.

PISA en el Aula es básicamente el resultado del trabajo de especialistas en diseño curricular, con conocimiento amplio en la reforma de secundaria y con pleno dominio en las disciplinas de Ciencias, Lectura y Matemáticas; quienes volcaron su experiencia y saber en la integración del núcleo de los tres ejemplares. El contenido de cada volumen comprende los siguientes capítulos:

Introducción general: Describe las actividades desarrolladas para concretar la obra.

Capítulo 1: Presenta un panorama de los factores que influyen en el aprendizaje, en el contexto de la sociedad actual.



Capítulo 2: Breve descripción de PISA y las dimensiones de la competencia evaluada.

Capítulo 3: El central, con las propuestas didácticas diseñadas por los especialistas.

El INEE está convencido de que este esfuerzo puede ser positivo, pero es consciente también del riesgo que existe de distorsiones o malentendidos, por lo que se reiteran los señalamientos dados en *PISA para Docentes*, aun cuando en esta nueva obra el contenido no gira alrededor de las unidades de reactivos difundidas:

- No se trata de entrenarse para la prueba mediante un esfuerzo artificial. Memorizar conceptos o datos no servirá, ya que las pruebas destacan habilidades complejas.

El INEE considera que el propósito que debe conducir todo esfuerzo de superación no debe ser subir artificialmente un puntaje, sino mejorar efectivamente el aprendizaje, lo que deberá hacer también que los puntajes suban, como consecuencia subsidiaria.

- No se trata de que los maestros abandonen sus programas de estudio y se dediquen a entrenar a sus alumnos para que saquen mejores resultados en unas pruebas ajenas a nuestra tradición educativa.

Las pruebas de PISA no están alineadas a los planes y programas de estudio de México, ni a los de ningún otro país, pero su enfoque es compatible con todos. Las pruebas de PISA miden habilidades complejas de Lectura, Matemáticas y Ciencias, que son necesarias para la vida en la sociedad del conocimiento. Para que sus alumnos tengan mejores resultados en esas pruebas, un maestro no tiene que abandonar su programa. Lo que se requiere es que, al desarrollar los contenidos programáticos, procure que sus alumnos desarrollen las habilidades superiores de razonamiento, análisis y otras que considera PISA. El INEE cree que vale la pena realizar un esfuerzo así, que deberá contribuir a mejorar la calidad educativa de los estudiantes en general y, secundariamente, podrá lograr que los resultados en PISA mejoren también.

- Tampoco se trata de subir artificialmente los resultados nacionales con el propósito único de ocupar un mejor lugar en el ordenamiento internacional que derivará de la aplicación de las pruebas 2009.

Por una parte, un progreso espectacular no es posible en un plazo corto, ya que los procesos de mejora educativa llevan tiempo, especialmente en la escala de un país tan grande como México. Por otra parte, subir posiciones en un ordenamiento no es un propósito digno de buscarse por sí mismo. De lo que sí se trata es de estimular una mejora del nivel educativo de los alumnos de México, subrayando la importancia de abandonar enfoques memorísticos al adoptar, en su lugar, estrategias pedagógicas más congruentes con las tendencias modernas, que destacan la importancia del desarrollo de las habilidades intelectuales superiores. Para ello, los maestros podrán encontrar útil ver secuencias didácticas; analizarlas y probarlas en sus salones de clase, no como sustitutos de su programa de estudio, sino como estrategias complementarias



de enseñanza, en aras de afianzar en los estudiantes una buena capacidad analítica y de razonamiento.

Este no es un libro de recetas, sino un conjunto articulado de principios, a partir de los cuales es posible diagnosticar, formular juicios y tomar decisiones fundamentadas sobre la enseñanza. Da pauta para estimular el pensamiento estratégico del profesor y representa un instrumento de análisis y reflexión sobre las prácticas docentes, desde la planeación hasta la evaluación del aprendizaje en el aula. Sugiere una forma de cómo relacionar la teoría con la práctica. Este material mostrará su potencial en la medida en que sea usado como instrumento para el análisis y la solución de cuestionamientos educativos y como un recurso útil para la toma de decisiones inherentes a la planificación de la enseñanza.

Esta triple obra fue preparada bajo la coordinación de María Antonieta Díaz Gutiérrez, directora de Proyectos Internacionales y Especiales del INEE, con la colaboración de Salvador Saulés Estrada, José Alfonso Jiménez Moreno, Rafael Turullols Fabre y David Castro Porcayo.

Un reconocimiento especial merece Pedro Ravela, miembro del Consejo Técnico del INEE, quien con sus aportes y valiosos comentarios ayudó en gran medida a que este material de difusión se concretara.

Felipe Martínez Rizo

Director General



INTRODUCCIÓN

La obra que ofrece la DPIE a los docentes, titulada *PISA en el Aula*, pretende dar continuidad a la meta de mejorar sus prácticas, así como apoyar su formación. Uno de los rasgos más sobresalientes de esta obra es que se basa en el trabajo desarrollado por especialistas en diseño curricular, con amplio dominio en Matemáticas y con la experiencia de haber participado en la reforma de secundaria. El trabajo consistió en la elaboración de propuestas didácticas encaminadas a fortalecer la competencia matemática en los estudiantes, aprovechando los referentes de PISA y el plan y programas de estudio de secundaria.

DESARROLLO DE LA OBRA

La realización de este material abarcó cuatro etapas. En la primera, la DPIE diseñó una guía para la elaboración de las propuestas didácticas dirigida a los especialistas. Este documento contenía las características del material requerido, el plazo de entrega y la descripción de los elementos a desarrollar, que consistían en:

- La exposición de la relación entre los referentes conceptuales de la Competencia matemática de PISA y el plan y programas de estudio de Matemáticas de secundaria.
- El desarrollo de una estrategia didáctica expresada en una secuencia, cuya intención era mejorar el pensamiento matemático de acuerdo con los contenidos de PISA y dirigida a un año escolar determinado, con la idea de integrar contextos reales y significativos para los estudiantes y con actividades retadoras e interesantes.
- La inclusión de dos tipos de recomendaciones: unas dirigidas al trabajo con otros docentes que apuntaran al intercambio de experiencias, la discusión, la reflexión y al trabajo colegiado; otras dirigidas a la vinculación con la familia a fin de que en casa se estimule el pensamiento matemático.
- La sugerencia de lecturas de índole práctico para los docentes que apuntalen el proceso de enseñanza-aprendizaje en general, y de manera particular, la Competencia matemática.
- El análisis pedagógico de una unidad de reactivos de PISA.



En la siguiente etapa se buscó a especialistas que cubrieran el perfil definido por la DPIE. El grupo de especialistas que participó fue:

- María Teresa Adriana Fonseca Cárdenas
- Demetrio Garmendia Guerrero
- María del Rosario Licea García
- Eduardo Mancera Martínez

Además se invitó a Ricardo Valdez, colaborador cercano de la reforma de secundaria, para enfatizar sobre las modificaciones sustanciales que se realizaron al plan y los programas.

La tercera etapa consistió en la impartición de un taller coordinado por personal de la DPIE, cuyo objetivo fue familiarizar a los especialistas con el marco de PISA, conocer el documento guía y, sobre todo, organizar y perfilar sus propuestas didácticas. El evento tuvo una duración de dos días y medio, al finalizar cada uno de los especialistas trabajó de forma individual, llevando consigo las diversas observaciones de sus propios colegas que enriquecieron sus propuestas.

El taller se desarrolló según lo acordado. Ricardo Valdez puntualizó algunos aspectos de la reforma de secundaria. Como parte de los acuerdos, el grupo decidió centrar sus propuestas didácticas en términos del contenido más que en el grado escolar. De esta forma, los docentes de los tres grados de secundaria podrán utilizar las propuestas de acuerdo con los contenidos que decida trabajar.

La cuarta y última etapa consistió en la recepción del material desarrollado. En esta fase de cierre, la labor fue ardua, pues la DPIE revisó detenidamente cada una de las propuestas a fin de verificar si cumplían o no con las características establecidas. Se enviaron las observaciones a los especialistas y se realizaron los ajustes necesarios. Sobre todo se buscó la unificación con los criterios establecidos.

CONTENIDO

El resultado de todo este trabajo es *PISA en el Aula*: una obra colectiva que conjuntó los esfuerzos de cada especialista. Todo el material se organizó pensando sobre todo en el docente, por lo que la estructura de la obra es la siguiente:

Primer capítulo “Algunos factores que influyen en el aprendizaje”. La DPIE presenta un panorama de los factores que pueden incidir en el aprendizaje de los estudiantes, sobre todo en aquellos relacionados en forma directa con los centros escolares, en el contexto de la sociedad actual. El docente podrá encontrar elementos conceptuales de gran relevancia a la hora de tomar decisiones en la elaboración de sus propias planificaciones y serán el marco en el que las propuestas didácticas cobran todo su sentido.

Segundo capítulo “Descripción del proyecto PISA y la Competencia matemática”. En este apartado se incluye una descripción concisa de lo que es el proyecto de evaluación. Después se exponen las diversas dimensiones del dominio de Matemáticas a fin de que el docente conozca los procesos, el contenido, el contexto o la situación y los niveles de desempeño. Este capítulo servirá al docente como referencia teórica de las propuestas didácticas de los especialistas.



Tercer capítulo “Propuestas didácticas para el desarrollo de la Competencia matemática”. En este apartado se integran las cuatro propuestas de los especialistas organizadas a partir de tres contenidos.

CONTENIDO	ESPECIALISTA
Cantidad	María del Rosario Licea García
Cambio y relaciones	Demetrio Garmendia Guerrero Eduardo Mancera Martínez
Probabilidad	María Teresa Adriana Fonseca Cárdenas

Para el contenido de *Cantidad* se contó con la participación de María del Rosario Licea García, quien centró su propuesta en la realización de diversas secuencias dirigidas a actividades de tipo práctico, por ejemplo, buscar la construcción de una cancha de fútbol para una escuela. Para ello, los estudiantes tendrán que conjuntar sus esfuerzos en diversas actividades que los lleven a estimar las medidas de la cancha, a diseñar el estacionamiento o a organizar un torneo en la cancha ya construida.

Para el contenido de *Cambio y relaciones* se contó con la participación de Demetrio Garmendia Guerrero y de Eduardo Mancera Martínez. El primero utilizó las tarifas de una compañía telefónica como motivo de la vida cotidiana para incentivar a los estudiantes en la discriminación de la información necesaria y, a partir de ecuaciones o expresiones algebraicas y de su respectiva graficación, poder solucionar problemas cercanos a su realidad. Mancera Martínez buscó con actividades sencillas, factibles de realizarse en el salón de clases, que los estudiantes se familiaricen con el lenguaje matemático en términos de representaciones numéricas, figurativas o literales. Contar los pasos que da un compañero, medir los tiempos en que realiza esa actividad, proyectar, a partir de tales mediciones, los caminos que se podrían recorrer, todo ello con el auxilio de tablas y gráficas que permiten evidenciar que el lenguaje matemático puede acercarse de forma práctica a los jóvenes.

Para el contenido de *Probabilidad* se contó con la participación de María Teresa Adriana Fonseca Cárdenas, quien se distinguió por la diversidad temática incluida en su propuesta. El fútbol, también en este caso, es uno de los motivos que pueden llevar al estudiante a elaboraciones estadísticas y a la construcción de gráficas de diversos diseños.

Anexos “Análisis de unidades de reactivos” y “Acercas de los autores”. Al final de la obra se agregan los análisis realizados por los propios especialistas de algunas unidades de reactivos liberadas de PISA. Con esto se aporta una nueva mirada que permitirá establecer vínculos más cercanos entre lo evaluado por PISA y lo enseñado en el aula. También se integra un apartado donde el lector podrá conocer la formación y del trabajo académico de los especialistas.



Capítulo 1

Algunos factores que influyen en el aprendizaje



La educación actual se ha centrado en la generación y distribución social del conocimiento, por lo que uno de sus principales retos es crear nuevas formas de construirlo. En este sentido, los actuales enfoques educativos enfatizan, por un lado, la importancia de contextualizar el saber producido y, por otro, la generación de nuevas estrategias de apropiación y aplicación del conocimiento; esta situación conlleva al desarrollo de la capacidad para adquirir, generar y utilizar el conocimiento en los estudiantes para atender las necesidades de su desarrollo y construir su propio futuro; sobre todo, al tener presente que las sociedades contemporáneas enfrentan el reto de adaptarse a procesos de cambio diversos. Esta adaptación es dinámica, esencialmente por el surgimiento de nuevas tendencias en la generación, difusión y utilización del conocimiento (Cornella, 1999).

Un elemento distintivo de la sociedad actual es la búsqueda del crecimiento equitativo y democrático en los miembros que la conforman, por lo que la capacidad para asumir y orientar el cambio que requiere, a partir de las relaciones entre el conocimiento, el sujeto que conoce y el entorno, es de suma importancia. Es a partir de esto que la educación se centra en que los miembros de una sociedad adquieran la capacidad de construir su futuro, y así incidir en su acontecer histórico. Por lo tanto, se requiere fortalecer el aprendizaje y desarrollar una fuerte capacidad de pensamiento y de reflexión estratégica.

Como parte de este desafío es importante *convertir información en conocimiento útil* y aprovechar los procesos de generación y apropiación de conocimiento para *inducir procesos dinámicos de aprendizaje* a través de los cuales éste desarrolle y fortalezca las habilidades de las personas, transformándose así en factor de cambio social. Este desafío está directamente relacionado con el papel que desempeña la educación en la formación de recursos humanos como un elemento crítico en el desarrollo de la sociedad. Es decir, una educación basada en el principio de *aprender a aprender* implica formar en el estudiante capacidades analíticas y de comprensión que favorezcan su desempeño como futuro ciudadano (Picardo, 2002).

En respuesta a esta demanda, en la formación de las nuevas generaciones de estudiantes, en todos los niveles educativos, hay que organi-



zar los proyectos teniendo como centro al estudiante. Esta visión de la educación ha dado lugar a la creación de planes y programas de estudio cuyos objetivos curriculares son formulados a partir de competencias. El desplazamiento de una educación centrada en la enseñanza hacia una que se enfoque en el aprendizaje exige cambios en las metodologías de enseñanza-aprendizaje.

Este enfoque exige cada vez más que los estudiantes sean capaces de localizar y procesar información, utilizar herramientas para resolver problemas reales y que apliquen los conocimientos aportados por las ciencias para comprender el mundo y tomar decisiones. En ese sentido, se pretende desarrollar estrategias que permitan que los alumnos accedan, den sentido y reconstruyan el conocimiento con base en la asimilación crítica de la información adquirida. Este es un reto para los diferentes actores educativos dentro y fuera de los centros escolares, por lo cual es necesario conocer los distintos factores que pueden incidir en la eficacia de los centros escolares para favorecer en la formación de sus alumnos, no sólo para que puedan desenvolverse adecuadamente en un trabajo, sino para desarrollar habilidades de pensamiento flexible de aprendizaje permanente.

La eficacia escolar es entendida como la manera en que la escuela “promueve de forma duradera el desarrollo integral de cada uno de sus alumnos más allá de lo que sería previsible teniendo en cuenta su rendimiento inicial y la situación social, cultural y económica de sus familias” (Murillo *et al.*, 2007: 83). Esta definición lleva a considerar la existencia de determinados factores de influencia para el desarrollo de los estudiantes *más allá de lo previsible*; la importancia de conocer estos factores y trabajar en ellos se debe, como ya se ha mencionado, a la actual demanda social de que los centros escolares deben enfocarse no sólo a la enseñanza de contenidos, sino también al desarrollo de habilidades, valores y actitudes que permitan a los estudiantes formar parte activa en esta sociedad que cuenta cada vez con más exigencias.

El informe Coleman (1966) es considerado como el primer estudio sobre eficacia escolar que se enfocó a determinar la relación entre el rendimiento académico de los estudiantes y las diversas características y recursos de las escuelas. Es a partir de este informe que se desarrollaron varias investigaciones centradas en torno a la búsqueda de evidencia en el ámbito escolar para probar y determinar qué elementos influyen en los resultados de aprendizaje, considerando aspectos como las condiciones sociales, técnicas, económicas o materiales con que cuenta o debe contar una escuela para alcanzar la eficacia². Dichos trabajos han concluido que una institución es efectiva cuando logra una diferencia importante en el aprendizaje que obtienen los estudiantes no sólo en un ciclo escolar, sino cuando se alcanza un mayor impacto y el desempeño académico de los alumnos vaya en aumento en cada ciclo (Fernández, 2003).

²Diversos investigadores en México han realizado estudios de este tipo desde hace aproximadamente un par de décadas; los resultados coinciden en que una escuela eficaz está fuertemente determinada por aspectos como el liderazgo docente, nivel socioeconómico, capital cultural de los padres, disponibilidad de auxiliares didácticos, costo de la educación, recursos materiales de la escuela, percepción del alumno sobre la práctica docente, entre otros (Ahuja y Schmelkes, 2004; Fernández, 2004; INEE, 2004; Martínez y Schmelkes, 1999; Noriega y Santos, 2004; SEP, 2004; Sandoval y Muñoz, 2004; Zorrilla y Romo, 2004).



En ese sentido, el metanálisis realizado por Edmonds (1982) considera que los siguientes aspectos, de manera interrelacionada, tienen una gran influencia en el rendimiento académico de los estudiantes:

1. Liderazgo del director en la comunidad escolar.
2. Altas expectativas de los docentes sobre el logro académico de sus alumnos.
3. Creación de un ambiente socialmente propicio para el aprendizaje.
4. Existencia de un sistema de evaluación y un control del rendimiento.
5. Uso adecuado del tiempo por parte de los docentes.
6. Participación activa de la familia y la comunidad.
7. Enseñanza efectiva.

A continuación se mencionan sus características principales:

1. Liderazgo del director en la comunidad escolar

El estilo de liderazgo que adopta el director de la escuela es uno de los elementos que determina el nivel de la calidad de la educación en el centro escolar, sobre todo al momento de aplicar métodos de administración y en la forma en que dirige las acciones a desarrollar. Sin lugar a dudas, es un aspecto relevante porque incide en la percepción que tienen sus colaboradores sobre sí mismos y su actividad, lo que influirá en su entusiasmo y compromiso con la tarea docente o administrativa.

Un liderazgo efectivo se caracteriza porque fomenta el trabajo en equipo entre administradores y docentes, genera un clima de confianza y apoyo mutuo, aunque el trabajo en equipo no sólo atañe a los miembros de la comunidad escolar, sino que abarca también a los padres de familia. Un director con estas características crea redes de contacto entre los diferentes actores educativos de tal forma que se fomente una alianza pedagógica dentro de un ambiente socialmente propicio para el aprendizaje.

El director guía proyectos que plantean desafíos permanentes y logra una identificación de todos y cada uno de los miembros de la comunidad con la tarea a realizar. Los proyectos son creativos y flexibles y en concordancia con las necesidades educativas que plantea la sociedad.

En esta dinámica, la identificación con la tarea logra un compromiso y estimula a toda la comunidad escolar a reconocer los esfuerzos individuales o colectivos, ya que esas acciones incrementan un sentido de pertenencia de la comunidad escolar.

2. Altas expectativas de los docentes sobre el logro académico de sus alumnos

Las expectativas que los docentes tienen sobre el posible rendimiento de sus estudiantes son un factor relevante para alcanzar la eficacia escolar debido a su influencia en los resultados de aprendizaje. Si los profesores tienen altas perspectivas sobre sus estudiantes, las manifestarán en la forma en que se dirigen hacia ellos y en la exigencia de su práctica educativa, así, si a los estudiantes se les trata de una manera que denote altas expectativas hacia ellos de forma consistente, esto influirá en su



autoconcepto, su motivación, sus niveles de aspiración de aprendizaje y sus interacciones con el profesor; de tal manera que estos cambios en los estudiantes retroalimentarán las expectativas iniciales de los profesores (Cotton, 2001; Good, 1987, citados en Tkatchov y Pollnow, 2008).

De acuerdo con Cotton (2001), de manera organizacional, las altas expectativas que se tienen sobre los estudiantes se favorecen por medio de:

- Las políticas que enfatizan la importancia del desempeño académico de los estudiantes.
- La percepción que los miembros de una escuela tienen sobre su propio desempeño.
- El establecimiento de metas (para individuos, grupos, salones de clase o incluso la escuela entera) en términos de lo mínimo aceptable, no a partir de lo mayormente esperado; así como motivar a los estudiantes a que ellos descubran que pueden desarrollar las habilidades para alcanzar dichos estándares.
- El uso de grupos heterogéneos para desarrollar, en la medida de lo posible, el aprendizaje cooperativo.
- El monitoreo del aprendizaje de los estudiantes orientado a mantener las expectativas apegadas al desempeño real de los alumnos.
- La retroalimentación útil hacia los estudiantes, no sólo centrándose en los errores que cometan en su proceso de aprendizaje.
- La implementación de frases sobre la escuela que enfaticen expectativas sobre ella misma.
- Ofrecer apoyo especial a los estudiantes que tengan problemas con su aprendizaje.

3. Creación de un ambiente socialmente propicio para el aprendizaje

Como parte de la efectividad escolar, en el proceso de aprendizaje, los estudiantes necesitan *voluntad* para aprender y *habilidad* para saber cómo invertir sus energías en el proceso de aprendizaje. La primera se puede desarrollar a partir de que el profesor establece relaciones de apoyo y confianza con los estudiantes, para ello debe conocerlos y mostrar disposición para auxiliarlos frente a dificultades académicas que experimenten. Por otra parte, la *habilidad* para que un estudiante adquiera conocimientos de forma efectiva implica que se involucre con sus tareas académicas, desarrolle habilidades de trabajo cooperativo y permita que su trabajo progrese, lo cual se puede lograr a partir de que el profesor establezca un ambiente de confianza para que el estudiante se involucre con el proceso de enseñanza y se comprometa con su propio aprendizaje (Strahan, 2008). Para crear este ambiente el profesor puede:

- Establecer una rutina dentro del salón de clases que permita crear relaciones de confianza con los jóvenes, definiendo expectativas de trabajo en equipo, explicar los procesos de enseñanza a utilizar, establecer reglas claras para toda la clase y guiar reflexiones grupales.
- Involucrar a los educandos en actividades de aprendizaje a partir del establecimiento de situaciones interesantes para ellos.



- Propiciar que los alumnos hagan conexiones personales de los contenidos.
- Establecer metas de aprendizaje, procurando que los estudiantes las identifiquen, de tal forma que al finalizar una actividad puedan reflexionar sobre su logro.
- Permitir a los jóvenes experimentar con estrategias y posteriormente identificar aquellas que les sean más útiles para cumplir las metas de aprendizaje.
- En la conformación de un ambiente propicio para el aprendizaje se encuentran implícitas las expectativas docentes hacia el posible desempeño de sus estudiantes, lo cual, como ya se mencionó, es otro factor relevante para el desarrollo adecuado del proceso de enseñanza-aprendizaje.

4. Existencia de un sistema de evaluación y un control del rendimiento

Como parte de los factores que propician la eficacia escolar (Cotton, 1995, citado en Murillo *et al.*, 2007), el sistema de evaluación del centro escolar permite conocer, entre otras cosas, el avance individual de los estudiantes, las prácticas docentes adecuadas a los objetivos y al modelo educativo del centro escolar, las tendencias de progreso de varias generaciones y las variables que influyen en el mismo. Conocer estas cuestiones le permite a la comunidad del centro escolar (director, docentes, padres de familia) identificar los aspectos de mejora y las prácticas que han sido adecuadas para el cumplimiento de objetivos.

De acuerdo con esta idea, la evaluación de los aprendizajes, del desempeño docente, así como de otros aspectos inmersos en el proceso de enseñanza-aprendizaje resultan de gran relevancia en la eficacia escolar, ya que ayudan a tener una visión de estrategias de enseñanza que han sido eficaces para el logro académico de los estudiantes que puedan ser manejadas posteriormente.

5. Uso adecuado del tiempo por parte de los docentes

La enseñanza efectiva también se relaciona con la destreza del docente para manejar la clase. En ocasiones se llega a pensar que esto implica sólo el control de la disciplina; pero es más que eso, requiere de un proceso de gestión y de control de tiempo en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Asignar un tiempo efectivo para realizar una tarea implica que el docente tenga claros los diversos momentos didácticos de acuerdo con el número de alumnos a atender: manejo de contenido, métodos y técnicas, características de los materiales, tipo de actividades, tiempo y propósitos del aprendizaje. La articulación de estos elementos permite hacer un uso adecuado del tiempo para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, las reglas de conducta establecidas claramente por el profesor al inicio del ciclo escolar, les permite a los alumnos comprender los límites y ajustarse a las formas de comportamiento, de participación y organización. En caso de que no se tenga un grupo pequeño, el tiempo destinado a la realización de tareas se reduce debido a que se requerirá mayor tiempo para organizar, manejar la clase y dar atención individual.



Durante cada actividad los jóvenes requieren de tiempo suficiente para aprehender el contenido que se enseña. Durante este momento de la clase, el docente puede supervisar actividades, a la vez que las retroalimenta con observaciones y precisiones a sus estudiantes.

Al final de la sesión de trabajo, la integración de experiencias por medio de la reflexión en grupo puede permitir al docente valorar el grado de alcance de los propósitos de aprendizaje.

6. Participación activa de la familia y la comunidad

Las redes de contacto y participación social dentro y fuera de la escuela han modificado la concepción tradicional del aula escolar en la que sólo participaban el maestro y los alumnos; actualmente las interacciones sociales se perciben de otra manera, ya que se moviliza la participación y el trabajo coordinado de los distintos agentes educativos (directivos, alumnos, profesores, padres de familia y comunidad), formando así las llamadas *comunidades de aprendizaje*.

El director guía a los docentes para orientar comportamientos y actitudes que fomenten un contexto social participativo en conjunto con el resto de los miembros de la comunidad escolar, teniendo como objetivo el alcance de metas de aprendizaje y haciendo que los padres de familia sean partícipes en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los vínculos interpersonales entre los miembros de la comunidad de aprendizaje pueden estrecharse a partir de que se brinden oportunidades y espacios de interacción, tal es el caso de las actividades llamadas *aulas abiertas*, en las cuales se realizan dinámicas con padres de familia y sus hijos, en el caso de los docentes y directivos se fomenta el trabajo colegiado y se valoran las diversas experiencias docentes como recurso de aprendizaje entre compañeros que fortalezcan las estrategias para la enseñanza.

7. Enseñanza efectiva

De acuerdo con Monereo (2007), para que el estudiante logre la apropiación del conocimiento, el docente debe implementar una serie de estrategias que favorezcan el alcance de los propósitos de aprendizaje. El uso discriminado de planes por parte del docente implicará un análisis acerca de las ventajas de un procedimiento con respecto a otro, o su combinación, en función de los propósitos de aprendizaje y sobre cuándo y por qué es útil la estrategia en cuestión.

Se puede hablar entonces de estrategias eficaces de enseñanza cuando el alumno se ajusta continuamente a los cambios y las variaciones que se van produciendo en el transcurso de la actividad y se acerca paulatinamente al objetivo de aprendizaje. Trabajar de esta forma en el aula facilita el aprendizaje significativo, pues promueve que el alumno examine las situaciones, establezca relaciones entre lo que ya sabe y la nueva información y actúe en consecuencia (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983).

En la obra de Monereo se describen tres ejemplos de estilos de enseñanza que muestran cómo la estrategia adoptada por el profesor determina la manera en que los estudiantes de secundaria se apropian de un mismo contenido y el nivel de profundidad que alcanzan.



En tres clases se desarrolla una actividad didáctica relativa al diseño del plano del aula. En el primer caso, el profesor pretende que los educandos realicen un plano a partir del que él modela. Para ello primeiramente dibuja en el pizarrón un plano del patio de una casa y explica los símbolos con los cuales se representarán sus elementos. A partir de esto, el profesor pide a los estudiantes que hagan lo mismo que él para el diseño del plano del aula, enfatizando que deben utilizar los mismos símbolos.

En el segundo caso, una profesora pretende que sus estudiantes aprendan a realizar el plano de su aula tomando en cuenta la necesidad de utilizar símbolos para representar sus elementos, para lo cual pide a los estudiantes que elaboren una lista de los elementos que el plano debe incluir y los símbolos con los cuales los pueden representar. Posteriormente solicita que piensen en cómo calcular las medidas del plano respetando la proporción de las medidas reales (escala). Cuando los estudiantes terminan sus planos la profesora los invita a compararlos y determinar qué método de cálculo de medidas del plano utilizada fue más efectivo y por qué.

En el tercer caso, el profesor también desea que los estudiantes realicen el plano de su aula, pero además pretende que analicen las variables que deben considerar para desarrollarlo y la mejor forma de realizarlo. Para alcanzar este objetivo, el profesor les muestra varios ejemplos de diferentes planos (de un comedor, una vivienda, uno de la misma aula elaborado por un compañero el año anterior) y los invita a reflexionar sobre la finalidad de cada uno de ellos. Posteriormente, el profesor les pide que analicen en qué se parecen y en qué son diferentes cada uno de ellos a la luz de su finalidad. Se espera que este tipo de reflexiones permitan que los alumnos aprendan el proceso de realización de un plano. Una vez realizado el análisis, el profesor pide a los estudiantes que realicen su plano con la idea de mostrarlo a sus padres para que conozcan cómo está estructurada su aula (pensar en la finalidad del plano). Para diseñar su plano, los estudiantes utilizan el procedimiento que consideren más adecuado.

Los ejemplos indicados reflejan cómo el objetivo propuesto por los maestros (diseñar un plano del aula) puede centrarse en que los estudiantes sigan direcciones propuestas por el docente para realizar una tarea, como en el primer ejemplo; asimismo, se puede inducir a los estudiantes a explorar, descubrir y proponer formas de simbolizar elementos reales, vinculando intencionadamente conocimientos de otras disciplinas, como en el segundo caso; o bien, se puede plantear a los estudiantes que construyan el *sentido* de los conocimientos dentro de las necesidades reales de una sociedad, tal como sucede en el tercer ejemplo. Cada uno de los métodos aplicados para alcanzar el propósito puede ser válido dentro de la estructura de la planeación didáctica de la disciplina. La decisión que tome el profesor para aplicar una u otra estrategia dependerá de las características del tema y el momento que considere que es el mejor para abordar, integrar y cumplir los propósitos generales de la asignatura.

En este sentido y a modo de recapitulación, las estrategias tienen un carácter intencional e implican:

- La aplicación experta y la reflexión profunda sobre el modo de emplearlas. Es necesario que se dominen las secuencias de accio-



nes e incluso las técnicas que las constituyen y que se entienda además cómo y cuándo aplicarlas flexiblemente.

- El control y la previa planificación de su ejecución.
- La selección intencionada de recursos en función de demandas contextuales determinadas y de la consecución de ciertas metas de aprendizaje (Pozo y Postigo, 1993).

A partir de esta organización del trabajo en el aula, tanto docentes como estudiantes adquieren conciencia y control de las funciones que les corresponde desempeñar en el proceso de enseñanza y aprendizaje, mejorando así los momentos que requiere el proceso de apropiación del conocimiento como:

- La adquisición
- La interpretación
- El análisis y la realización de inferencias
- La comprensión y organización conceptual
- La comunicación

Como parte final del proceso eficaz de enseñanza se espera que las estrategias utilizadas por los docentes, que se han mencionado a lo largo de este texto, permitan a los estudiantes desarrollar su metacognición, la cual se entiende como el conocimiento y control de factores que influyen en el aprendizaje tales como el conocimiento de uno mismo, la tarea por realizar y las estrategias que se utilizan para resolverla (Baker & Brown, 1984, citados en Richards, 2005). Esta habilidad se formula a partir de la retroalimentación que el docente hace sobre la forma de administración que el alumno realiza sobre sus propios conocimientos y estrategias que lo lleva a *aprender a aprender*, lo que no se refiere a que domine contenidos específicos o de un conjunto de técnicas, sino al dominio de habilidades cognitivas para aprender diferentes tipos de contenidos. En esta actividad el docente libera la responsabilidad al alumno sobre la administración de sus conocimientos y estrategias cognitivas.

- Por tanto, como ya se adelantó en apartados anteriores, para lograr que los alumnos fortalezcan habilidades estratégicas que incidan en su aprendizaje, se debe tomar en cuenta lo siguiente:
- El proceso de enseñanza debe considerar contenidos conceptuales y procedimentales, aplicando procedimientos disciplinares e interdisciplinares.
- Fomentar procesos de reflexión en el alumno sobre las operaciones y decisiones mentales que realiza cuando aprende o resuelve una tarea.
- Fomentar el trabajo en equipo y analizar las condiciones sociales en que se produce la resolución de un determinado tipo de tareas o el aprendizaje de un tipo específico de contenidos.

Así como partir de pautas metodológicas que permitan:

- Plantear actividades que demanden de los alumnos una regulación consciente y deliberada de su conducta, de modo que se requiere planificar previamente su actuación, controlar y supervisar lo que realizan y propiciar que reflexionen sobre su ejecución.
- Evitar la enseñanza aislada de técnicas para estudio, asegurándose de que el estudiante domine diferentes procedimientos de



aprendizaje en actividades concretas que le puedan ser útiles en diversas situaciones.

- Enseñar estrategias de aprendizaje en contextos en los que éstas resulten funcionales (aplicarse a situaciones reales para atender necesidades académicas o personales).
- Crear un clima en el aula para la reflexión, la exposición de dudas, la exploración y la discusión sobre las distintas maneras como puede pensarse un tema (Monereo, *et al.*, 2007).

Como puede observarse, existen diversos factores escolares interrelacionados que favorecen el resultado de los estudiantes con respecto a la construcción de un conocimiento útil para la adaptación a su entorno, entre ellos se encuentran el liderazgo del director, las expectativas docentes hacia el logro de sus estudiantes, el establecimiento de un ambiente propicio para el aprendizaje, el uso adecuado de las evaluaciones y del tiempo dentro del aula y la participación activa de las familias, así como el diseño de estrategias de enseñanza-aprendizaje que incluyan objetivos acorde al currículo (que los estudiantes deben conocer), actividades orientadas hacia la reflexión y hacia la aplicación de los contenidos en situaciones reales, así como el diseño de actividades de evaluación acorde a los objetivos y a las características de la actividad y de los educandos. La consideración de estos factores puede auxiliar al docente en el diseño y uso de estrategias orientadas al logro académico de sus estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

- Ahuja, R. y S. Schmelkes (2004). Los aspirantes indígenas a la educación media superior. En: Tirado, F. (coord.). *Evaluación de la educación en México, Indicadores EXANI I*. México: Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (Ceneval).
- Ausubel, D., J. Novak y H. Hanesian (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Coleman, J. (1966). *Equality of Educational Opportunity*. Washington, D.C., U.S. Government Printing Office.
- Cornella, A. (1999). En la sociedad del conocimiento, la riqueza está en las ideas. *Base de datos de revistas de texto completo EBSCO*. Disponible en: <http://dialnet.uniroja.es>
- Cotton, K. (2001). *Expectations and student outcomes*. Disponible en: <http://www.nwrel.org/scpd/sirs/4/xcu7.html>
- Edmons, R. (1982) Programs of school improvement: an overview. *Educational leadership*. 40, pp. 4-11.
- Fernández, T. (2003). Métodos estadísticos de estimación de los efectos de la escuela y su aplicación al estudio de las escuelas eficaces. *Revista Electrónica Iberoamericana de calidad, eficiencia y cambio en educación*. (1) 2.
- Fernández, T. (2004). *Perfil de las escuelas primarias eficaces en México*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).
- INEE (2004). *La calidad de la educación básica en México*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).



- Martínez R. y S. Schmelkes (1999). Aseguramiento de la calidad de las pruebas de estándares nacionales para la educación primaria, de la Secretaría de Educación Pública. *Ponencia presentada en el V Congreso de la Investigación Educativa, México*. Disponible en: http://snee.sep.gob.mx/BROW-AES/Ponencia2_VCongreso.htm Consultado el 14 de agosto de 2008.
- Murillo, J. et al. (2007). Fundamentación. *Investigación Iberoamericana sobre Eficiencia Escolar*. Colombia: Convenio Andrés Bello, pp. 19 – 92.
- Monereo, C. et al. (2007). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela*. México: Graó.
- Noriega, C. y A. Santos (2004). Un acercamiento a las telesecundarias con base en los resultados de sus alumnos en el EXANI-I. En: Tirado, F. (coord.). *Evaluación de la educación en México, Indicadores EXANI I*. México: Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior.
- Picardo, O. (2002). *Pedagogía informacional: enseñar a aprender en la sociedad del conocimiento*. Disponible en: <http://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/opicardo0602/opicardo0602.html>
- Pozo, J. y A. Postigo (1993). *Las estrategias de aprendizaje como un contenido del currículo*. Barcelona: Mimeo.
- Richards, J. (2005). A review of the research literature on effective instructional strategies. En: Appalachia Educational Laboratory at Edvancia (Ed.) *School improvement: Effective teaching*. Nashville: Edvancia.
- Sandoval, A. y C. Muñoz (2004). Equidad y eficacia en la distribución de oportunidades de acceder a la educación media. En: Tirado, F. (coord.). *Evaluación de la educación en México, Indicadores EXANI I*. México: Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior.
- SEP (2004). *Visión y misión de la SEP*. Disponible en: http://www.sep.gob.mx/wb2/sep/sep_Vision_y_Mision_de_la_SEP. Consultado: el 15 de agosto de 2008.
- Strahan, D. (2008). Successful teachers develop academic momentum with reluctant students. *Middle school journal*. 39 (5), pp. 4-12.
- Tkatchov, O. y S. Pollnow (2008). High expectations and differentiation equal academic success. *Education Resources Information Center database*. Disponible en: <http://eric.ed.gov>
- Zorrilla, M. y J. Romo (2004). La educación secundaria en Aguascalientes (1999-2002). En: Tirado, F. (coord.). *Evaluación de la educación en México*. México: Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior.



Descripción del proyecto PISA y la Competencia matemática



DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO PISA

El propósito central del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (*Programme for International Student Assessment*, PISA) es medir en qué grado los estudiantes de 15 años, que se encuentran al final de su escolaridad obligatoria, son capaces de recurrir a lo aprendido cuando se enfrentan a situaciones novedosas, tanto en el ámbito escolar como fuera de él; es decir, busca estimar el nivel de habilidades y competencias esenciales para su participación plena en la sociedad.

A partir del impulso otorgado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), en el año 2000 se realizó la primera evaluación internacional con la participación de 32 países. Para 2003 eran 40 y para 2006 la cifra llegó a 57. Los países buscan, sobre todo, obtener de forma sistemática información que les permita realizar los análisis pertinentes con el fin de “supervisar adecuadamente el desempeño y valorar el alcance de las metas”³ que se han propuesto en sus propios sistemas educativos.

Enfoque

La evaluación de PISA se centra en tres áreas que tradicionalmente se han considerado claves para el aprendizaje en todos los sistemas educativos: Ciencias, Lectura y Matemáticas. Sin embargo, la evaluación no es curricular, sino basada en competencias. Esto es, en términos de las habilidades, destrezas y actitudes de los estudiantes para analizar y resolver problemas, para manejar información y para responder a situaciones reales que se les pudieran presentar en el futuro.

El modelo de evaluación de PISA está centrado en el concepto de *literacy* (aptitud o competencia, aunque en diferentes países ha sido traducido como cultura, formación, alfabetización o habilidad). En México, este concepto se ha manejado como *competencia* y definido como “un sistema de

³OCDE (2008). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Madrid: Santillana, p. 5. La OCDE es una organización de cooperación internacional, compuesta por treinta países, y tiene por objetivo coordinar sus políticas económicas y sociales. Fue fundada en 1961 y su sede central se encuentra en la ciudad de París, Francia. México forma parte de este organismo desde 1994.



acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos no cognitivos, como motivación y valores, que son adquiridos y desarrollados por los individuos a lo largo de su vida y son indispensables para participar eficazmente en diversos contextos sociales⁴.

Periodicidad

La regularidad de la evaluación permite a los países monitorear los progresos en los objetivos en materia educativa que se han impuesto. Cada tres años se evalúan las tres áreas, pero se enfatiza una de ellas: durante 2000 fue Lectura, en 2003 Matemáticas, en 2006 Ciencias y en 2009 será otra vez Lectura. El dominio prioritario ocupa las dos terceras partes de las preguntas de la evaluación.

Población objetivo

Como existen diferencias entre los países en cuanto a la naturaleza y duración de la escolaridad, PISA optó por definir la población objetivo en relación con una edad determinada, con el fin de garantizar que los resultados del desempeño educativo sean comparables. De esta forma, se incluye a los estudiantes de entre 15 años tres meses y 16 años dos meses al momento de la evaluación, que estén inscritos en una institución educativa a partir del 7º grado.

Las muestras representativas que se utilizan oscilan entre 4 mil 500 y 10 mil estudiantes, de aproximadamente 150 escuelas por cada país. De esta manera es posible realizar inferencias nacionales. Si un país desea disponer de una mayor representatividad respecto a cierto estrato de su población, puede solicitar una sobre muestra. Éste fue el caso de México que, tanto en el ciclo 2003 como en el de 2006, solicitó una sobre muestra para poder inferir resultados no sólo a nivel nacional, sino también por entidad federativa. En esta última evaluación se consideraron 30 mil 971 estudiantes de mil 140 escuelas⁵.

DEFINICIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

Es la capacidad de un individuo de identificar y comprender el papel de las Matemáticas en el mundo actual, emitir juicios bien fundamentados y utilizarlas y comprometerse con ellas de manera que puedan satisfacer las necesidades de la vida del sujeto como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

La Competencia matemática de PISA no se reduce al dominio de la terminología, los datos y los procedimientos matemáticos ni a la habilidad para realizar diversas operaciones y poner en práctica determinados métodos; la Competencia matemática supone una combinación de estos elementos con objeto de responder a exigencias que se plantean en contextos reales. Implica poseer la habilidad para plantear, formular e interpretar problemas mediante las Matemáticas en una variedad de situaciones y contextos que van desde lo sencillo a lo complejo.

⁴INEE (2005). *PISA para Docentes*. México: SEP, p. 16.

⁵Datos tomados de M. A. Díaz *et al.* (2007). *PISA 2006 en México*. México, INEE.



La Competencia matemática de PISA se integra por las siguientes dimensiones:

DIMENSIONES	
PROCESOS	<ul style="list-style-type: none"> · Reproducción · Conexión · Reflexión
CONTENIDO	<ul style="list-style-type: none"> · Cantidad · Espacio y forma · Cambio y relaciones · Probabilidad
SITUACIÓN O CONTEXTO	<ul style="list-style-type: none"> · Personal · Pública · Educativa y laboral · Científica

A continuación se describen las características de cada una de las dimensiones de la competencia matemática.

Procesos

Son las capacidades de los estudiantes que deben activarse para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos.

Reproducción

Este proceso comprende el conocimiento de hechos, la retención memorística de objetos y propiedades matemáticas, el desarrollo de procedimientos que resultan de rutina para un estudiante y la aplicación de algoritmos estándar. Implica la realización de cálculos simples para la solución de problemas comunes; incluye el conocimiento, definición de hechos y representación de problemas.

El pensamiento matemático en este proceso está relacionado con preguntas tales como: ¿existe? si es así, ¿cuántos? Implica también conocer el tipo de respuestas que ofrecen las Matemáticas a estas respuestas, así como distinguir entre varios tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis).

Conexión

El proceso de conexión de información de ideas y procedimientos matemáticos permite resolver problemas que ya no son sólo de rutina, pero que incluyen escenarios familiares. Para su desarrollo la conexión considera la construcción de modelos, traducción, interpretación y solución de problemas.

En este proceso se espera que los estudiantes manejen diferentes métodos de representación matemática (de acuerdo con la situación y el ob-



jetivo del problema). El establecimiento de conexiones requiere también que los estudiantes sean capaces de distinguir y relacionar diferentes definiciones, afirmaciones, ejemplos y demostraciones; así como decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural.

Reflexión

En este proceso se espera que el estudiante sepa lo que es una demostración matemática y sus diferencias con otros tipos de razonamiento, así como tener un sentido de la heurística (qué puede ocurrir y por qué) y crear argumentos matemáticos.

Supone que los estudiantes puedan matematizar una condición, es decir, que reconozcan y extraigan las Matemáticas de una situación y emplearlas para solucionar un problema, también para desarrollar sus propios modelos y estrategias y presentar argumentos matemáticos (incluyendo demostraciones y generalizaciones).

Contenido

Esta dimensión se refiere al tipo de tema abordado en los problemas y tareas de Matemáticas que se presenta a los estudiantes. PISA clasifica el contenido matemático en cuatro, como se presenta en el siguiente esquema.



Cantidad

Este tema se centra en la importancia de la cuantificación para entender y organizar el mundo. Abarca los fenómenos numéricos, así como las relaciones y los patrones cuantitativos. Implica la comprensión del concepto de tamaño relativo, el reconocimiento de patrones numéricos y el uso de los números para representar cantidades y propiedades cuantificables de objetos de la vida real (operaciones y medidas). Además, aborda el procesamiento y la comprensión de los números presentados en diversas formas. Un aspecto importante es el razonamiento cuantitativo, que implica un sentido numérico, la comprensión del significado de las operaciones, el cálculo mental y la estimación. La rama de las Matemáticas asociada más frecuentemente con el razonamiento cuantitativo es la Aritmética.

Espacio y forma

Se relaciona con los fenómenos espaciales y geométricos. Requiere la búsqueda de similitudes y diferencias al analizar los componentes de las formas, reconocer patrones y figuras en diferentes representaciones y dimensiones, así como entender las propiedades de objetos geométricos y sus posiciones relativas. Este contenido se relaciona con la Geometría.

Cambio y relaciones

Involucra las manifestaciones matemáticas del cambio, así como las relaciones funcionales (lineales, exponenciales, logísticas, tanto discretas como continuas) y la dependencia entre variables.

Las relaciones matemáticas se expresan mediante ecuaciones, fórmulas o desigualdades, pero las relaciones de carácter más general (como la equivalencia o la divisibilidad y la integración, por mencionar algunas) también son importantes. Las relaciones se pueden expresar por medio de una variedad de representaciones, como por ejemplo tablas, expresiones simbólicas, algebraicas, gráficas y geométricas. Dado que las distintas representaciones pueden tener diferentes propósitos y propiedades, la traducción entre representaciones es a menudo de importancia capital cuando se trata de resolver actividades matemáticas. Este contenido se relaciona con el Álgebra

Probabilidad

Este contenido involucra los fenómenos y las relaciones de probabilidad y estadística que llegan a ser cada vez más relevantes en la sociedad de la información. Las actividades y conceptos específicos de este contenido son la recolección de datos, el procesamiento y análisis de los mismos, su presentación, la probabilidad de ocurrencia de los fenómenos y la inferencia.

Situación o contexto

Son los ámbitos en que se sitúan los problemas de Matemáticas. Los tipos de situación pueden ser personal, educativa o laboral, pública y cien-



tífica. La situación personal se relaciona directamente con las actividades cotidianas de los estudiantes; la educativa o laboral se refiere a la vida de un alumno en la escuela o en un ambiente laboral; la situación pública está situada en la comunidad y se basan en la forma que los educandos entienden las relaciones entre los elementos de su entorno; y la situación científica es más abstracta e implica la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

Niveles de desempeño

Los resultados se presentan en niveles que permiten catalogar el desempeño de los estudiantes y describir las habilidades y las tareas que son capaces de hacer, tal como se muestra en el siguiente cuadro.

Niveles de desempeño de la Competencia matemática

	Cantidad	Espacio y forma	Cambio y relaciones	Probabilidad
Nivel 6	<p>Conceptuar y trabajar con modelos que contengan procesos y relaciones matemáticas complejas; trabajar con expresiones formales y simbólicas; usar habilidades de razonamiento avanzado para derivar estrategias de solución de problemas y asociarlas con contextos múltiples; usar procesos de cálculo secuencial; formular conclusiones, argumentos y explicaciones precisas.</p>	<p>Resolver problemas complejos que involucren representaciones múltiples y que incluyan procesos de cálculo secuencial. Identificar y extraer información relevante y asociar diferente información relacionada. Razonar, comprender, reflexionar y generalizar resultados y hallazgos; comunicar soluciones y dar explicaciones y argumentaciones.</p>	<p>Usar comprensión significativa y habilidades de razonamiento y argumentación abstractas. Tener conocimiento técnico y de convenciones para solucionar problemas y generalizar soluciones matemáticas a problemas complejos del mundo real.</p>	<p>Usar habilidades de pensamiento y razonamiento de alto nivel en contextos estadísticos o probabilísticos para crear representaciones matemáticas de situaciones del mundo real; comprender y reflexionar para resolver problemas, y formular y comunicar argumentos y explicaciones.</p>
Nivel 5	<p>Trabajar de manera efectiva con modelos de situaciones complejas para solucionar problemas; usar habilidades de razonamiento, comprensión e interpretación bien desarrolladas con diferentes representaciones; realizar procesos secuenciales; comunicar razonamiento y argumentos.</p>	<p>Resolver problemas que requieran hacer suposiciones apropiadas o que impliquen trabajar con suposiciones dadas. Usar el razonamiento espacial, argumentar, y la capacidad para identificar información relevante; interpretar y asociar diferentes representaciones; trabajar de manera estratégica y realizar procesos múltiples y secuenciales.</p>	<p>Resolver problemas, usando el álgebra avanzada, modelos y expresiones matemáticas formales. Asociar representaciones matemáticas formales a situaciones complejas del mundo real. Usar habilidades de solución de problemas complejos y de multinivel. Reflexionar y comunicar razonamientos y argumentaciones.</p>	<p>Aplicar conocimiento probabilístico y estadístico en situaciones problema que estén de alguna manera estructuradas y en donde la representación matemática sea parcialmente aparente. Usar el razonamiento y la comprensión para interpretar y analizar información dada, para desarrollar modelos apropiados y realizar procesos de cálculo secuenciales; comunicar razones y argumentos.</p>

	Cantidad	Espacio y forma	Cambio y relaciones	Probabilidad
Nivel 4	Trabajar de manera efectiva con modelos simples de situaciones complejas; usar habilidades de razonamiento en una variedad de contextos; interpretar diferentes representaciones de una misma situación; analizar y aplicar relaciones cuantitativas; usar diferentes habilidades de cálculo para la solución de problemas.	Resolver problemas que impliquen razonamiento visual y espacial, así como la argumentación en contextos no familiares; relacionar e integrar diferentes representaciones; realizar procesos secuenciales; aplicar habilidades de visualización espacial e interpretación.	Entender y trabajar con representaciones múltiples, incluyendo modelos matemáticos explícitos de situaciones del mundo real para resolver problemas prácticos. Tener flexibilidad en la interpretación y razonamiento en contextos no familiares; y comunicar las explicaciones y argumentaciones resultantes.	Usar conceptos básicos de estadística y probabilidad combinados con razonamiento numérico en contextos menos familiares para la solución de problemas simples; realizar procesos de cálculo secuencial o de multinivel; usar y comunicar argumentos basados en la interpretación de datos.
Nivel 3	Usar estrategias simples de solución de problemas que incluyan el razonamiento en contextos familiares; interpretar tablas para localizar información; realizar cálculos descritos explícitamente, incluyendo procesos secuenciales.	Resolver problemas que impliquen razonamiento visual y espacial elemental en contextos familiares; relacionar diferentes representaciones de objetos familiares; usar habilidades de solución de problemas elementales; diseñar estrategias simples y aplicar algoritmos simples.	Resolver problemas que impliquen trabajar con representaciones múltiples (textos, gráficas, tablas, fórmulas) que incluyan cierta interpretación y razonamiento en contextos familiares, así como la comunicación de argumentaciones.	Interpretar información y datos estadísticos y asociar diferentes fuentes de información; usar razonamiento básico con conceptos, símbolos y convenciones simples de probabilidad; y comunicar el razonamiento.
Nivel 2	Interpretar tablas sencillas para identificar y extraer información relevante; realizar cálculos aritméticos básicos; interpretar y trabajar con relaciones cuantitativas simples.	Resolver problemas de representación matemática simple, donde el contenido matemático sea directo y claramente presentado; usar pensamiento matemático básico, así como convenciones en contextos familiares.	Resolver problemas que impliquen trabajar con representaciones múltiples (textos, gráficas, tablas, fórmulas); usar habilidades básicas de interpretación y razonamiento.	Localizar información estadística presentada en forma gráfica; entender conceptos y convenciones estadísticas básicas.
Nivel 1	Resolver problemas del tipo más básico, en donde toda la información relevante se presenta explícitamente. La situación está bien dirigida y tiene un alcance limitado, de tal forma que la actividad es obvia y la tarea matemática es básica, como una operación aritmética simple.	Resolver problemas simples en contextos familiares, usando dibujos de objetos geométricos familiares; y aplicar habilidades de conteo y cálculo básicos.	Localizar información relevante en una tabla o gráfica sencilla; seguir instrucciones directas y simples, al leer información de una tabla o gráfica en una forma familiar o estándar; realizar cálculos simples que impliquen relaciones entre dos variables familiares.	Entender y usar ideas básicas de probabilidad en contextos experimentales familiares.



Los estudiantes cuyo desempeño se sitúa por debajo del Nivel 1 son incapaces de tener éxito en las tareas más básicas que busca medir PISA. Esto no significa que no posean habilidades matemáticas, pero la mayoría de estos estudiantes probablemente tendrán serias dificultades para usar las Matemáticas como herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida.



Propuestas didácticas para el desarrollo de la Competencia matemática



PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL CONTENIDO CANTIDAD

Rosario Licea García

I.- Asociación de PISA con el Plan y Programa de Estudios de Secundaria

El objetivo de acercar a toda la sociedad oportunidades educativas de calidad implica el mejoramiento del sistema en conjunto, así como el desarrollo de estrategias específicas centradas en la atención a los grupos de población más vulnerables.

Los retos de México en el futuro de la educación

Nuestro país vive un acelerado cambio demográfico, social, económico, cultural y político, lo que exige que la educación se transforme para estar en condiciones de cumplir con los objetivos que se plantean, así como para responder a los requerimientos sociales que estos rápidos cambios exigen.

Las formas en que los individuos se acercan al conocimiento en su proceso de formación y desarrollo traen consigo retos que la educación enfrenta, y que son señalados por los índices de calidad en la educación.

Para responder a estos retos es necesario, como dice la cita arriba utilizada, el mejoramiento del sistema en su conjunto, pero para saber qué se necesita mejorar es preciso hacer un análisis de la situación que se vive, donde las instituciones piden rendir cuentas de lo que se hace o deja de hacerse en las escuelas, de lo que los maestros han de realizar y de los resultados que se obtienen en las diversas evaluaciones nacionales e internacionales.

En educación ya no podemos decir que estamos solos, que trabajamos nosotros y nuestros alumnos, ahora nos damos cuenta que con el mundo globalizado ya estamos comparando nuestro sistema educativo con el de países más avanzados y observamos los resultados: las estadísticas muestran los avances obtenidos; ahora el mundo se puede ver, como alguien dijo por “una ventana más grande”, lo que implica que desde el maestro de la escuela Rural unitaria, hasta el docente de Telese-



cundaria, o el maestro de una escuela Urbana o Privada, el docente esté inmerso en un trabajo que nos compete a todos los que trabajamos por mejorar los sistemas educativos y que realizamos nuestro mejor esfuerzo porque recibimos los resultados de algunas evaluaciones.

Pero, ¿estamos trabajando para el mismo rumbo? o ¿damos tiros sin apuntar a un blanco? ¿nuestro trabajo dentro del aula tiene el enfoque correcto para elevar la calidad de nuestras prácticas o solamente estamos aplicando metodologías, materiales o esfuerzos que no nos ofrecen un buen resultado?

Para esto es conveniente analizar nuestro programa de educación secundaria, sus propósitos, su enfoque, su organización y a la vez revisar una de las evaluaciones más notables de los últimos tiempos: ¿hay algún punto de encuentro entre el Programa 2006 y la Evaluación PISA?

Nuestra Constitución señala las finalidades de nuestra educación básica en el artículo 3o. y en la Ley General de Educación y el Programa Nacional de Educación 2001-2006 donde se concreta el compromiso del Estado mexicano de “ofrecer una educación democrática, nacional, intercultural, laica y obligatoria que favorezca el desarrollo del individuo y de su comunidad, así como el sentido de pertenencia a una nación multicultural y plurilingüe, y la conciencia de solidaridad internacional de los educandos” (SEP 2006: 7).

Estas finalidades tienen múltiples implicaciones, por ejemplo, la exigencia de construir mecanismos graduales y permanentes que permitan evaluar y reformular los contenidos curriculares y las formas de gestión del sistema educativo.

En este compromiso de reformular los contenidos curriculares se implementa la Reforma 2006 que pretende concretar y consolidar lo planteado en la Reforma de 1993 que propuso una formación general, única y común para todos los alumnos, pero que en la práctica no se llevó a cabo debido a la falta de una correcta articulación de la educación básica y debido a otros factores.

Ahora el programa de 2006 establece un “perfil de egreso de la educación básica que define el tipo de ciudadano que se desea formar al terminar la educación básica, este perfil de egreso se convierte en el referente obligado de la enseñanza y el aprendizaje en la aulas, es una guía para los docentes para trabajar con los contenidos de las diversas asignaturas y es la base para valorar la eficacia del proceso educativo” (SEP 2006).

El perfil de egreso señala los rasgos que se desea tenga el alumno al terminar su educación básica, esos rasgos destacan la necesidad de fortalecer las competencias para la vida. De manera que el propósito educativo central será el desarrollo de éstas.

En este sentido el programa se refiere a las competencias como un saber hacer (habilidades) con el saber como los conocimientos y el ser como valores y actitudes, es decir, manifestar una competencia es poner en juego esas habilidades, actitudes y conocimientos en el logro de un propósito en un contexto determinado. Las competencias se observan en la acción integrada de sus componentes. En el currículo se desea que las competencias se desarrollen en todas las asignaturas y que se busque una transversalidad para que, en el transcurso de la educación básica, el alumno se forme integralmente y ponga de manifiesto todas las compe-



tencias logradas en su paso por la educación básica.

Las competencias contribuyen al logro del perfil de egreso y se dividen en genéricas, es decir, que se desarrollan en todas las asignaturas y en las específicas de cada asignatura.

En el caso de Matemáticas el programa contempla el desarrollo de cuatro competencias: el planteamiento y resolución de problemas, la argumentación, el manejo de técnicas y la comunicación, además de las competencias para la vida.

También se señalan en el programa, al iniciar cada bloque, los aprendizajes esperados que le permiten al docente conocer el alcance de lo que ha de estudiar el alumno y le ayudan a preparar estrategias adecuadas para conseguir las metas planteadas, a la vez que son un referente para la comunicación entre alumnos, padres de familia y maestros en relación a lo que han de aprender los estudiantes.

En relación a lo esperado en el perfil de egreso hay un rasgo específico para Matemáticas, que también se desarrolla en otras asignaturas, “el alumno emplea la argumentación y el razonamiento al analizar situaciones, identificar problemas, formular preguntas, emitir juicios y proponer diversas soluciones” (SEP 2006: 10).

De esta forma la educación básica quiere cumplir sus finalidades educativas mediante la propuesta de un currículo que tenga como propósito educativo el desarrollo de competencias donde el alumno razone, analice situaciones, plantee y resuelva problemas, comunique sus resultados y busque caminos para resolverlos, todo esto partiendo de un medio, es decir, de un problema que permite al alumno usar las herramientas matemáticas que se desea que aprenda, así como el intercambio de ideas en las sesiones de equipo o grupales donde se analizan los procedimientos que siguen los educandos para construir nuevos conocimientos y cómo superan las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje.

El problema planteado presenta retos cognitivos que no sean tan difíciles que los alumnos no puedan resolver, ni tan fáciles que no permitan el desarrollo del análisis y la reflexión.

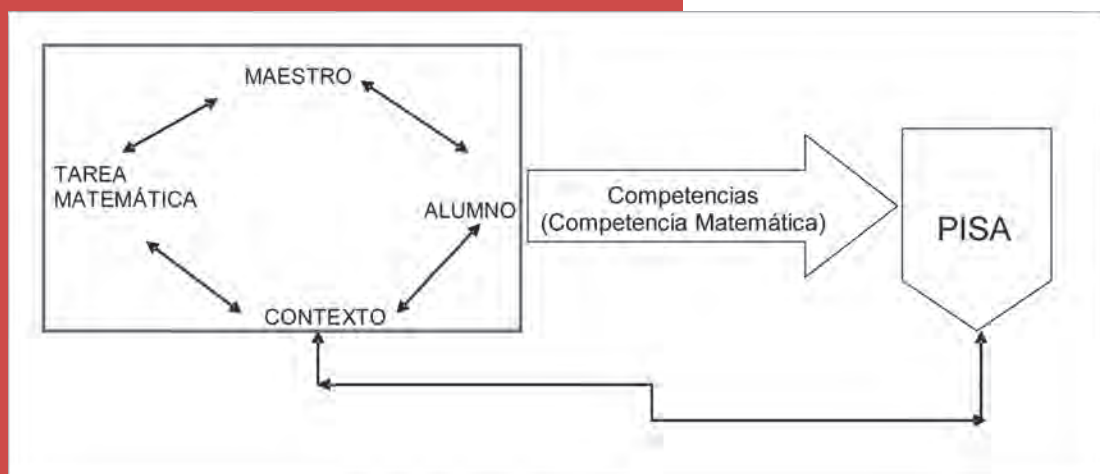
Al resolver, los alumnos se darán cuenta de que existen diversas estrategias posibles y que hay que usar al menos una, para ello, los alumnos deberán usar sus conocimientos previos para entrar en el reto o desafío que el problema les presenta, en ese momento se puede reestructurar algo que ya se sabe, para ampliarlo, modificarlo o para reafirmarlo y volverlo a emplear en

En el proceso de estudio de las Matemáticas en las aulas escolarizadas siempre encontramos *tres actores*:

- El alumno, que es quien estudia, y que la escuela tiene la misión de encaminarlo hacia una formación integral.
- El saber, en este caso las Matemáticas que han de ser aprendidas como parte de las competencias a desarrollar por parte de los alumnos.
- El profesor, encargado por la sociedad y la escuela para llevar a cabo el proyecto de facilitador y acompañante de quien estudia.

En este proceso de estudio se producen múltiples interacciones, la didáctica de las Matemáticas va a modelizar y estudiar las interacciones entre los *tres actores*:





De esta manera el alumno va desarrollando la Competencia matemática.

El programa de 2006 presenta al alumno los conocimientos y habilidades organizados en tres ejes temáticos y en cinco bloques, que se van desarrollando progresivamente a lo largo de los tres grados. Cada bloque presenta aprendizajes esperados organizados en apartados y cada uno de éstos se desarrolla a través de planes de clase en los que los conocimientos y habilidades se van secuenciando a través de intenciones didácticas que parten de procesos informales para llegar a procesos expertos.

En cada plan de clase aparecen las consignas que son el “medio” o el problema planteado en el que el alumno va a interactuar junto con sus compañeros y posteriormente hará una confrontación grupal donde se reflexionará sobre los procedimientos encontrados eligiendo el más eficaz.

La evaluación es formativa pues analiza lo que el alumno conoce, cómo aplica los conocimientos y su desarrollo de competencias a través de líneas de progreso que se verifican en la forma de resolver problemas de manera autónoma o con ayuda, de la capacidad de pasar de los procedimientos informales a los procedimientos expertos, y de la posibilidad de asimilar el tránsito entre la justificación pragmática a la justificación axiomática.

El proyecto comparativo PISA es un proyecto de evaluación que es impulsado por la OCDE, que está diseñado para incidir en la política educativa de los países participantes y para aportar información para la sociedad en general respecto a los asuntos más relevantes de la educación.

“Su objetivo principal es la evaluación de las aptitudes o competencias que los estudiantes necesitarán a lo largo de su vida” (INEE, 2005), dirigiéndose a muestras de la población de 15 años tres meses y 16 años dos meses al momento de la evaluación, en México ésta se aplica a partir del nivel de secundaria.



Un rasgo importante de PISA es que no es curricular, sino que es una evaluación basada en competencias, “su propósito es evaluar qué tan bien están preparados los estudiantes para enfrentar los retos del futuro, si son capaces de analizar, razonar y comunicar sus ideas efectivamente y si tienen la capacidad de seguir aprendiendo durante toda la vida” (OCDE, 2006).

La siguiente tabla nos muestra, a manera de síntesis, algunos rasgos, vistos desde PISA y desde el Programa de Matemáticas 2006, con el fin de observar similitudes y diferencias entre ambos y así encontrar un punto de asociación, así como también una relación entre un aspecto de PISA con los respectivos conocimientos y habilidades del Programa de Matemáticas 2006:

RASGOS	PISA	PROGRAMA
Competencia Matemática	Capacidad para identificar y comprender el papel que desempeñan las Matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, utilizar y relacionarse con las Matemáticas de manera que se puedan satisfacer sus necesidades vitales, como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos	Como un saber hacer (habilidades) con el saber como los conocimientos y el ser como los valores y actitudes, es decir, manifestar una competencia es poner en juego esas habilidades, actitudes, conocimientos en el logro de un propósito en un contexto que te toque desenvolverte. Las competencias se observan en la acción integrada de sus componentes El alumno emplea la argumentación y el razonamiento al analizar situaciones, identificar problemas, formular preguntas, emitir juicios y proponer diversas soluciones. Llegar a ser matemáticamente competente está ligado a la comprensión del contenido matemático, cuando se comprenden las nociones y procedimientos matemáticos se pueden utilizar de forma flexible, adaptándolas a situaciones nuevas y permitiendo establecer relación entre ellas y emplearlas para aprender un nuevo contenido matemático.
Procesos	Reproducción Conexión Reflexión	Planteamiento de problemas en un contexto dado. Trabajo en equipo, interacción del alumno y equipo con el problema planteado (empleo de conocimientos previos). Confrontaciones de ideas, observar, analizar, reflexionar. Argumentar, comunicar, manejar técnicas, sesiones grupales, obtener conclusiones, práctica y ejercitación.
Situación	Personal Científica Educativa Laboral Pública	Los problemas son contextualizados en los diferentes ámbitos e intereses del alumno: familiar, social, etcétera.
Contenido	Espacio y Forma Cantidad Cambio y Relaciones Probabilidad	Sentido numérico y pensamiento algebraico. Forma ,espacio y medida. Manejo de la información. Se ven a lo largo de los tres grados, en cinco bloques y se tocan los tres ejes en cada bloque.



RASGOS	PISA	PROGRAMA
Niveles de desempeño	Seis niveles de progresión de avance	Líneas de progreso del desarrollo de competencias: Resolver de manera autónoma o con ayuda De los procedimientos informales a los procedimientos expertos De la justificación pragmática a la justificación axiomática
Evaluación	Evaluación de competencias o aptitudes que los jóvenes necesitarán a lo largo de su vida	Constructiva y formativa en dos líneas: ¿Qué sabe hacer el alumno? y ¿en qué sentido aplica lo que sabe? ¿Cómo se van desarrollando sus competencias?
Objetivo	Incidir en las políticas educativas de los países participantes	Que el alumno tenga una formación matemática que le permita enfrentar y responder problemas de la vida moderna

Síntesis

Relación del contenido *Cantidad* tanto en PISA como en los respectivos Apartados del Programa 2006 (Ejemplo)

En PISA Contenido <i>Cantidad</i>	Grado	Bloque	Apartados del Programa 2006 que se asocian al Contenido <i>Cantidad</i> de PISA Apartados
-SENTIDO NUMÉRICO -CÁLCULO MENTAL -ESTIMACIONES	1°	I	Propiedades de los sistemas de numeración y contrastarlas con otros sistemas posicionales y no posicionales Representar números fraccionarios en la recta numérica Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas
	2°	III	Construir sucesiones numéricas a partir de una regla dada. Obtener la regla que genera una sucesión de números con signo



En PISA Contenido <i>Cantidad</i>	Grado	Bloque	Apartados del Programa 2006 que se asocian al Contenido <i>Cantidad</i> de PISA Apartados
-COMPRESIÓN DEL SIGNIFICADO DE LAS OPERACIONES -CÁLCULO MENTAL -ESTIMACIÓN	1°	II	2.1 Resolver problemas aditivos con números fraccionarios y decimales en distintos contextos 2.2 Resolver problemas que impliquen la multiplicación y la división con números fraccionarios en distintos contextos 2.3 Resolver problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos
		III	3.1 Resolver problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos
		IV	4.1 Plantear y resolver problemas que impliquen la utilización de números con signo
		V	5.1 Utilizar procedimientos informales y algoritmos de adición y sustracción de números con signo en diversas situaciones
	2°	I	1.1 Resolver problemas que impliquen multiplicaciones y divisiones de números con signo. Utilizar la jerarquía de las operaciones y los paréntesis si fuera necesario en problemas y cálculos
		II	
1°	IV	4.2 Resolver problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y la potencia de exponente natural y de números naturales y decimales	
SENSIBILIDAD HACIA LAS MAGNITUDES NUMÉRICAS	1°	I	Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación

Al hacer este análisis se encuentra un punto de asociación y éste es el desarrollo de competencias; el programa desea que los alumnos desarrollen las competencias necesarias para responder a las exigencias de la vida social y PISA evalúa en qué medida o de qué calidad es el desarrollo de las competencias de los alumnos participantes.

El enfoque en PISA es observar el rumbo de las políticas educativas. En el programa 2006 se busca formar al alumno para que sea un ciudadano con el perfil de egreso que se plantea, y en especial en Matemáticas se desea que el alumno tenga una formación matemática que le permita enfrentar y resolver los problemas de la vida moderna. Los resultados de PISA son “insumos” para la retroalimentación del trabajo con el Programa de Matemáticas y con las demás asignaturas del currículo de secundaria y así lograr una mejor calidad educativa.

Los procesos que emplea el programa, como tareas que se activan para conectar los fenómenos relacionados con los problemas, son actividades donde el alumno va a poner en juego procesos cognitivos: obser-



vación, reflexión, análisis, argumentación y comunicación de ideas matemáticas. Lo ideal es que estos procesos se logren como está planteado, pero hay muchos factores que lo impiden tales como: la falta de estrategias del docente para dirigir al alumno en estos aspectos, los deficientes conocimientos previos que muchas veces trae el alumno, falta de tiempo, falta de materiales, etcétera, que impiden que los procesos se lleven a cabo y se logren las metas.

En cuanto a los contenidos PISA evalúa aspectos semejantes al programa. Vemos en el ejemplo del contenido *Cantidad* que éste se trabaja en varios conocimientos y habilidades de los apartados del Programa, pero, se observa que en algunos aspectos la profundidad que se da al contenido en PISA es mayor.

En general se puede decir que el programa curricular 2006 está pensado y tiene los elementos para que el alumno en un futuro pueda evaluarse en PISA y obtenga resultados destacados, pero que aún faltan muchos aspectos por consolidar, estamos empezando, vamos lento, pero creemos que finalmente si se lleva la metodología como se ha planeado, hay apoyo para los docentes y se mejoran las necesidades sociales de algunos medios se pueden alcanzar mejores resultados en PISA.

II.- Secuencia didáctica

Como ya se ha dicho, el Programa de Matemáticas 2006 pide que se trabaje proponiendo a los alumnos un medio o tarea matemática, un problema, un desafío, al que se enfrentarán los alumnos, e intercambiando ideas con sus compañeros de equipo y con su grupo llegarán a procedimientos de solución y así irán trabajando los conocimientos y habilidades logrando desarrollar la Competencia matemática y las demás competencias que señala el perfil de egreso de educación básica. El programa de cada grado se lleva a cabo en cinco bloques, al inicio de cada bloque se presentan aprendizajes esperados que se desarrollan en apartados para lograr estudiar los conocimientos habilidades de una manera gradual con el fin de establecer metas parciales a lo largo del año escolar.

PISA pone especial atención a las “capacidades de los estudiantes que deben activarse para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva, mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos” (INEE, 2005: 21) y se espera que los alumnos demuestren las tareas matemáticas de reproducción, conexión y reflexión. Demostrando su Competencia matemática en seis niveles de desempeño.

De manera que los docentes han de conjugar el programa con las dimensiones del dominio de Matemáticas de PISA para que sus alumnos desarrollen las competencias requeridas para que en el futuro puedan alcanzar niveles satisfactorios en las evaluaciones subsecuentes de PISA.

El trabajo mediante secuencias didácticas puede ser una herramienta útil que permite mejorar las competencias de los alumnos en el marco teórico de PISA y en concordancia con los propósitos del plan de estudios.

La siguiente es una secuencia didáctica que desarrolla el contenido de *Cantidad* y abarca los siguientes apartados:



- 2.1 Resolver problemas aditivos con números fraccionarios y decimales en distintos contextos.
- 2.2 Resolver problemas que impliquen la multiplicación y la división con números fraccionarios en distintos contextos.
- 2.3 Resolver problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos.
- 3.1 Resolver problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos.

Se puede desarrollar en cinco sesiones y se recomienda que el docente vaya guiando a los alumnos en la aplicación de los procesos de *reproducción, conexión y reflexión* a la consecución de los aprendizajes esperados.

Los conocimientos y habilidades de esta secuencia corresponden al bloque II y al bloque III de primer grado, por lo que se puede emplear para estudiar estos apartados, o bien para aplicarla luego que se hayan tratado los cuatro apartados. Se propone desarrollarla en cinco sesiones.

Construyendo la cancha de fútbol para una escuela

Secuencia didáctica para primer grado

Contenido: Cantidad

Programa: (G1- BII - A 2.1, 2.2, 2.3; G1 - BIII -A 3.1)

(Grado primero, Bloques I y II; Apartados 2.1, 2.2, 2.3 y 3.1)

Sesiones: cinco

Contexto: Personal

Propósito: Que los alumnos comprendan el significado de las operaciones con números fraccionarios y decimales en diversos contextos, mediante procesos de reproducción, conexión y reflexión que les permitan ir desarrollando competencias.

Aprendizajes esperados

- Resolver problemas que impliquen efectuar operaciones con números fraccionarios y decimales.
- Analizar, comparar, jerarquizar y reflexionar en los procedimientos para resolver problemas con fracciones y decimales y su aplicación en diversos contextos.
- Organizar e integrar sus actividades para resolver las interrogantes de estas sesiones, que los alumnos presenten propuestas de solución, colaboren con sus compañeros y mantengan una actitud de disposición y apertura en el estudio de estos contenidos.

Procesos que se estarán practicando: reproducción, conexión y reflexión.

Habilidades que se van desarrollando: Resolución de problemas, argumentación, manejo de técnicas y comunicación.



SESIÓN 1. Estimando las medidas de nuestra cancha de fútbol



1. Que los estudiantes trabajen en equipos leyendo este problema y resuelvan las interrogantes.

Los padres de familia de una escuela secundaria han comprado un terreno anexo para construir una cancha de fútbol en la que jueguen los alumnos. El terreno mide 80 metros de largo y 60 metros de ancho.

- ¿Qué cantidades *estiman* que se deben destinar para la cancha si han de dejar $\frac{1}{5}$ de terreno para bancas y $\frac{1}{8}$ para baños, bebederos y área de jardín?
- ¿Qué *operaciones* se hacen para saber cuánto terreno queda para las canchas quitando el terreno de los baños y bebederos?
- ¿Qué *cantidad de terreno* se destinará para la cancha?

Recomendaciones

- El docente planteará el problema a los alumnos destinando entre 15 y 20 minutos para que ellos, reunidos en equipos, lo resuelvan.
- Motivar a los alumnos a que hagan la traducción e interpretación de los procedimientos por los que se puede resolver el problema, que empleen los cálculos necesarios y mediante la reunión de ideas y procedimientos matemáticos busquen respuestas.
- Estar atento a los procedimientos que los equipos van realizando, dejándolos proponer y guiándolos mediante preguntas que los hagan reflexionar sobre algún error.
- Observar el trabajo de los equipos para que a la hora de la puesta en común se puedan hacer precisiones sobre los procedimientos y las respuestas presentadas.
- Posteriormente se hará una confrontación de ideas en torno a los procedimientos y respuestas encontradas, así como las dudas que se tuvieron, tanto para realizar las estimaciones como para las operaciones.
- La fase de estimación es importante para que el alumno tenga una idea aproximada de la respuesta y tenga un punto de partida para buscar procedimientos de solución, por lo que es muy importante que el maestro promueva que los alumnos presenten ante el grupo cómo hicieron su estimación.
- Es importante que se haga la debida conexión de ideas en relación a las operaciones que se emplearán para resolver el inciso c



donde los alumnos han de realizar varias operaciones para llegar a las respuestas correctas.

- Luego se llegará a conclusiones dejando en claro los diversos procedimientos y la solución correcta a las tres preguntas del problema.

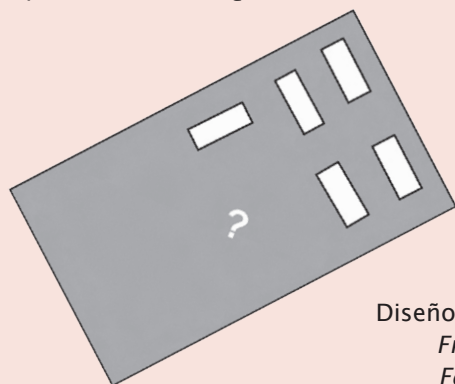
SESIONES 2 y 3. Diseñando el estacionamiento de la escuela

Los padres de familia de esa escuela secundaria observaron que el terreno para la cancha de fútbol era muy grande y decidieron quitar 160 metros cuadrados para un estacionamiento, en un terreno rectangular de 16 metros de frente por 10 metros de fondo.

Le pidieron a un grupo de primer grado que, guiados por su maestro de Matemáticas, hicieran un diseño para saber cuántos carros cabrían en el estacionamiento, pensando que cada espacio para cada carro midiera 3.75 metros de ancho y 4.20 metros de largo, y dejando espacio para entrada y salida de vehículos y teniendo la entrada por la parte más larga del terreno que da a la calle de la que se dejarán 6.85 metros para que haya espacio para entrar y salir.

2.-El maestro de matemáticas pidió a sus alumnos que analicen la propuesta de los padres de familia y hagan los trazos necesarios y operaciones para contestar las siguientes preguntas. Reúnanse en equipos de cuatro.

- a) ¿Cómo sería *su diseño* del estacionamiento tratando de aprovechar al máximo el terreno rectangular?
- b) Aproximadamente ¿cuántos carros cabrían?



Diseño del estacionamiento
Frente 16 metros
Fondo 10 metros

Recomendaciones

- La primera sesión de estas clases se dedicará a que los alumnos trabajen en equipos y se pongan de acuerdo sobre el diseño del estacionamiento de acuerdo a las condiciones que se les dan.
- Los equipos entrarán en una etapa de reflexión, analizando las operaciones a realizar y teniendo creatividad para el diseño, que cubra los requisitos.
- El docente los animará para que pongan en juego la comprensión, reflexión y creatividad para identificar o enlazar conocimientos sobre unidades de medida, uso de instrumentos de medición,



resolución de operaciones con números decimales y, sobre todo, las condiciones del problema planteado.

- Cada equipo tendrá distintas ideas de cómo distribuir los espacios en su diseño de acuerdo a las medidas, lo cual es permitido y ahí el maestro hará notar lo que cada equipo hizo para llegar a solucionar no sólo las operaciones sino también el diseño.
- En la segunda sesión se darán a conocer los resultados y se realizará la confrontación, haciéndose las preguntas ¿por qué se eligió tal o cual diseño? observando quienes supieron aprovechar mejor el terreno.
- Se procurará que cada equipo comunique sus resultados y sobre todo las operaciones que tuvieron que realizar para llegar a las respuestas, que por supuesto serán diferentes, y se observará si cumplieron con las restricciones que presenta el problema.
- Se concluirá concretando qué operaciones se realizaron y cuál diseño es el más adecuado tomando en cuenta el que sea más útil.
- Finalmente se nombrará un equipo representante del grupo para que presente las propuestas a los padres de familia.

SESIÓN 4. Las medidas de la cancha de fútbol

El director de la secundaria llamó a los capitanes de cada equipo de fútbol para que acomoden las porterías y tracen la cancha de fútbol, que no va a ser profesional, sino que se va a ajustar a las medidas del terreno.

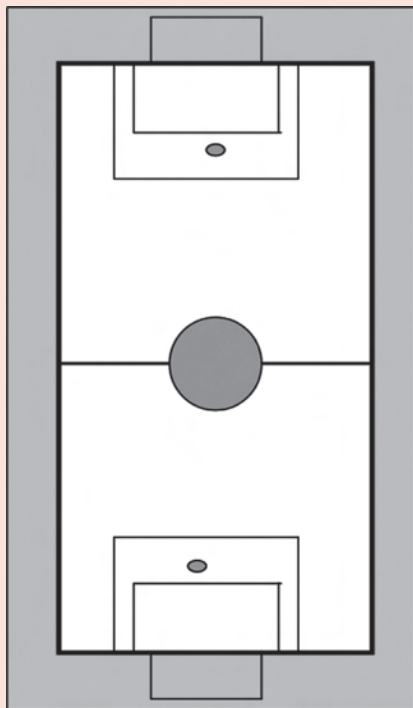
A ellos se les informó que se dispone de un terreno rectangular de 77 metros de largo por 40 metros de ancho y en ese terreno ellos señalarán los espacios para:

- a) Los postes de la portería con una separación entre sí de 7.25 metros.
- b) La línea media.
- c) El círculo central de 8.25 metros de diámetro.
- d) El área chica a 2.5 metros de cada poste de la portería, teniendo como superficie 61.25 metros cuadrados. ¿Qué dimensiones tendrá?
- e) El área grande a 2.5 metros del área chica y con una superficie de 138 metros cuadrados. ¿Qué dimensiones tendrá?
- f) El tiro de penal que va a estar en dirección al centro de la portería a la mitad de la distancia entre el área chica y el área grande.
- d) El área penal de 11.5 metros de cada portería.

Los capitanes se reunieron e hicieron las operaciones correspondientes para delinear la cancha.



3.-Reúnanse en equipos y hagan las operaciones necesarias para saber ¿qué medidas pusieron los capitanes en todos los espacios notables de la cancha?



Recomendaciones

- El docente pedirá a sus alumnos que hagan una investigación de las características de la cancha de fútbol.
- En la sesión se destinará un tiempo para que los alumnos reunidos en equipos trabajen sobre el problema que se plantea.
- El docente los motivará para que involucren las cantidades y operaciones necesarias para dar respuesta al problema. Es necesario que se busque que los alumnos movilicen su comprensión para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias que les pueda servir para dar respuesta al problema.
- Durante la confrontación grupal se darán a conocer los procedimientos empleados para dar las medidas que se les piden.
- Se cerrará la sesión con el trazo de la cancha y las medidas solicitadas, haciendo el maestro hincapié sobre los procedimientos empleados y las respuestas correctas.



SESIÓN 5. El torneo de fútbol

4.- De manera individual, analiza el siguiente problema y trata de dar respuestas a las preguntas.

Por fin llegó el día de estrenar la cancha de fútbol, para lo cual se organizó un torneo en el que participaron un equipo representante de cada uno de los 12 grupos de la secundaria.

Los maestros de educación física, organizadores del torneo, distribuyeron las comisiones entre algunos grupos.

- A los grupos uno y dos les tocó pintar con cal el perímetro de la cancha, para lo que les dijeron que con 2.5 kilogramos de cal se completa para $\frac{1}{6}$ del perímetro de la cancha. ¿Cuántos kilogramos de cal deberán de comprar aproximadamente?
- Durante el torneo las alumnas de los grupos tres y cuatro van a vender aguas frescas, para lo que una madre de familia les preparó tres recipientes de limonada de 13.75 litros cada una y la van a vender en vasos de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos vasos de limonada venderán? ¿cuál será su ganancia si venden el vaso a \$ 5.50 y han de pagar a las madres de familia \$215.50 de los gastos?
- A los grupos 11 y 12 les tocó hacer los banderines para cada equipo y entre otros materiales compraron 35 metros de listón verde para hacer cortes de $\frac{3}{5}$ cada uno, y 28 metros de listón amarillo para hacer cortes de $\frac{2}{7}$ cada uno, ¿cuántos cortes de listón sacan de cada pieza? ¿cuántos metros de listón necesitan para los 12 banderines, si esos que compraron se emplea para $\frac{1}{3}$ de los banderines?
- Finalmente revisa los problemas de todas las sesiones y contesta si se ocupó todo el terreno o cuánto sobró.



Recomendaciones

- Este problema requiere la reunión de ideas y procedimientos matemáticos para resolver estos problemas que requieren del uso de varias operaciones; para contestar las preguntas se destinará unos 20 minutos para que cada alumno trabaje.
- En la sesión grupal los alumnos comunicarán las operaciones que necesitaron realizar y los diversos procedimientos que emplearon.
- Como ya es el cierre de la secuencia didáctica es conveniente que se concrete el empleo de las operaciones de fracciones y números decimales para que todos los alumnos puedan aplicarlos en los diversos contextos. Se hará mención de los procedimientos que se emplearon durante la secuencia didáctica.
- En esta secuencia se estarán trabajando los siguientes conocimientos y habilidades: primer grado, bloque II y III, apartados:
 - 2.1 Resolver problemas aditivos con números fraccionarios y decimales en distintos contextos.
 - 2.2 Resolver problemas que impliquen la multiplicación y la división con números fraccionarios en distintos contextos.
 - 2.3 Resolver problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos.
 - 3.1 Resolver problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos.

Comentarios sobre la evaluación de esta secuencia didáctica

En este tipo de problemas se espera que los alumnos empleen diferentes tipos de representación de acuerdo con las preguntas que se les hacen en los problemas y también busquen diversos caminos para dar respuestas, también se requiere que hagan conexiones entre las diferentes afirmaciones que se les presentan y puedan enlazar ideas de posibles soluciones a las situaciones planteadas.

Al presentar a los alumnos diversos problemas en un determinado contexto se busca que desde el inicio se vaya evaluando formativamente en dos líneas:

- ¿Cómo es el desempeño de los alumnos?
- ¿Cómo se van desarrollando las competencias de los alumnos?
- ¿Qué procesos se están aplicando?

El docente en todo momento irá observando el trabajo de los alumnos e irá registrando algunos indicadores que den muestra del progreso en estos aspectos. Algunos indicadores pudieran ser:

- El alumno va desarrollando autonomía en la resolución de los problemas.
- Aporta en su equipo ideas para solucionar y argumenta estas ideas.
- Muestra avance en la formalidad matemática de sus procedimientos.
- Comunica con seguridad sus ideas de solución y tienen participación en las sesiones grupales.

Estas evaluaciones pueden ser de índole cualitativa y empleando una determinada escala.



Evaluación formativa de aplicación de procesos y desarrollo de competencias

Lista de alumnos	¿Muestra autonomía en la resolución de problemas?	¿Presenta avance para pasar de los procedimientos informales a los procedimientos expertos?	¿Va avanzando en la presentación de sus argumentos partiendo de una explicación pragmática a una apoyada en axiomas?	¿Reproduce procedimientos conocidos para resolver problemas, incluye la definición de hechos, la realización de cálculos y procedimientos de rutina?	¿Requiere la reunión de ideas y procedimientos matemáticos para resolver problemas no rutinarios en escenarios familiares? ¿Considera la construcción de modelos, traducción, interpretación y solución de problemas estándar?	¿Moviliza la comprensión, reflexión y creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias? ¿Abarca la formulación y solución de problemas complejos? Desarrolla una aproximación matemática y capacidad de generalización.
1						
2						
3						

Cómo es el desempeño de cada alumno en relación a:

- sus participaciones en el trabajo de equipo
- alguna tarea que haya encargado el docente
- la comunicación que hace de los procedimientos encontrados
- la participación en la confrontación de ideas en las sesiones grupales
- las respuestas correctas que presenta, ya sea individual o en equipo, de los problemas planteados
- el empleo correcto de los algoritmos tratados
- la disposición para el trabajo que se va presentando
- los diversos procedimientos planteados como respuesta a los problemas

Es importante que en el transcurso de esta secuencia el docente vaya observando si los alumnos están aplicando los procesos que se quieren desarrollar: reproducción y conexión, en el trabajo diario y continuo del alumno.

Los siguientes formatos son sugerencias para evaluar el desempeño del alumno en el *trabajo individual*, *de equipo* y las *tareas*, además de los exámenes que el docente aplique.



MATEMÁTICAS

Formato para evaluación

Nombre del alumno(a) _____

Trabajo en equipo

Indicadores

-Se interesa por el trabajo en equipo y se integra con sus compañeros.	-Se interesa por el trabajo en equipo y se integra con sus compañeros. -Escucha las aportaciones de los compañeros con respeto y participa continuamente.	-Se interesa por el trabajo en equipo y se integra con sus compañeros. -Escucha las aportaciones de los compañeros con respeto y participa continuamente. -Propone soluciones a los problemas que se le presentan al equipo.	-Se interesa por el trabajo en equipo y se integra con sus compañeros. -Escucha las aportaciones de los compañeros con respeto y participa continuamente. -Propone soluciones a los problemas que se le presentan al equipo. -Argumenta para explicar, mostrar o justificar el problema.	-Se interesa por el trabajo en equipo y se integra con sus compañeros. -Escucha las aportaciones de los compañeros con respeto y participa continuamente. -Propone soluciones a los problemas que se le presentan al equipo. -Argumenta para explicar, mostrar o justificar el problema. -Presenta, junto con su equipo, estrategias correctas de solución.
--	--	--	---	---

MATEMÁTICAS

Formato para evaluación

Nombre del alumno(a) _____

Trabajo individual

Indicadores

-Elige adecuadamente las operaciones o procesos al resolver un problema.	-Elige adecuadamente las operaciones o procesos al resolver un problema. -Tiene iniciativa para proponer estrategias de solución.	-Elige adecuadamente las operaciones o procesos al resolver un problema. -Tiene iniciativa para proponer estrategias de solución. -Identifica, plantea y resuelve distintos tipos de problemas.	-Elige adecuadamente las operaciones o procesos al resolver un problema. -Tiene iniciativa para proponer estrategias de solución. -Identifica, plantea y resuelve distintos tipos de problemas. -Resuelve problemas empleando más de un procedimiento.	-Elige adecuadamente las operaciones o procesos al resolver un problema. -Tiene iniciativa para proponer estrategias de solución. -Identifica, plantea y resuelve distintos tipos de problemas. -Resuelve problemas empleando más de un procedimiento. -Comunica con claridad las ideas matemáticas encontradas.
--	--	---	---	--



MATEMÁTICAS

Formato para evaluación

Nombre del alumno(a) _____

Tareas

Indicadores

<p>-Realiza y <i>completa</i> autónomamente sus tareas.</p>	<p>-Realiza y completa autónomamente su tareas. -Emplea las herramientas matemáticas que conoce, para realizar su tarea y la hizo correctamente.</p>	<p>-Realiza completa y autónomamente su tareas. -Emplea las herramientas matemáticas que conoce, para realizar su tarea y la hizo correctamente. -Reafirmó los conocimientos y habilidades mediante la tarea y la entregó a tiempo.</p>	<p>-Realiza completa y autónomamente su tarea. -Emplea las herramientas matemáticas que conoce, para realizar su tarea y la hizo correctamente. -Reafirmó los conocimientos y habilidades mediante la tarea y la entregó a tiempo. -Realizó su tarea y comunica al grupo sus procedimientos de solución.</p>	<p>-Realiza completa y autónomamente su tarea. -Emplea las herramientas matemáticas que conoce, para realizar su tarea y la hizo correctamente. -Reafirmó los conocimientos y habilidades mediante la tarea y la entregó a tiempo. -Realizó su tarea y comunica al grupo sus procedimientos de solución. -Profundizó en la tarea solicitada investigando en otras fuentes y esforzándose por presentarla de manera creativa.</p>
---	---	---	---	--

La siguiente es una secuencia didáctica que desarrolla el contenido de *Cantidad* y corresponde al apartado:

- 1.3 Construir sucesiones de números a partir de una regla dada. Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

Se sugiere emplearla para que los alumnos estudien este apartado, que corresponde al Bloque I de primer grado. Se propone desarrollarla en tres sesiones.

En esta secuencia se pretende que los alumnos trabajen con sucesiones primeramente de figuras, luego con números y buscando las figuras o números que continúan o bien las que ocupan un determinado lugar; al principio los alumnos podrán tratar de dibujarlas o ir contando hasta llegar al lugar que se les pidió, pero se darán cuenta de que son procedimientos largos y muchas veces no son efectivos, por lo que se les crea



la necesidad de buscar una regla para las sucesiones: el docente los guiará a enunciar la regla primeramente en forma verbal y luego algebraicamente.

EJERCICIOS CON NÚMEROS Y FIGURAS

Secuencia Didáctica

Contenido: Cantidad

Programa: GI BI A 1.3 (Grado primero, Bloque I, Apartado 1.3)

Sesiones: tres

Contexto: Educativo

Propósito: Que los alumnos representen sucesiones numéricas o figurativas a partir de una regla dada y viceversa. Determinen expresiones generales que definan las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

Aprendizajes Esperados

- Determinar las expresiones generales que definen las reglas de las sucesiones numéricas y figurativas
- Buscar regularidades, formularlas y producir argumentos para validarlas
- Observar, analizar y comparar las sucesiones para que enuncien verbalmente, y de manera simbólica-algebraica, la regla que da lugar a una sucesión determinada.
- Trabajar colaborativamente y participar en la confrontación grupal teniendo una buena disposición para lograr los aprendizajes que se proponen.

Procesos que se estarán practicando: reproducción, conexión y reflexión

Habilidades que se van desarrollando: Resolución de problemas, manejo de técnicas, argumentación y comunicación.

SESIÓN 1. Resolviendo ejercicios con números y figuras

El maestro Luis y sus alumnos están haciendo ejercicios con números y con figuras y cada uno plantea a todo el grupo un problema donde intervengan los números o figuras que tengan una relación.

a) Un equipo planteó lo siguiente:

“Cada vez que se suman dos números consecutivos el resultado es un número impar”.

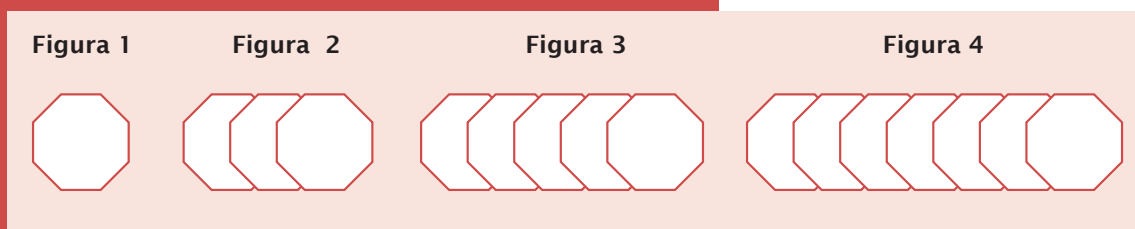
¿Están de acuerdo con lo que plantearon en este equipo? _____

¿Por qué? _____

Argumenten sus respuestas y escriban tres ejemplos. Reunidos en binas



b) Otro equipo realizó el siguiente diseño de figuras e hizo estas preguntas:



¿Cuántos octágonos tendría una hipotética figura 10 _ _ _ _ _ y una figura 100? _ _ _ _ _

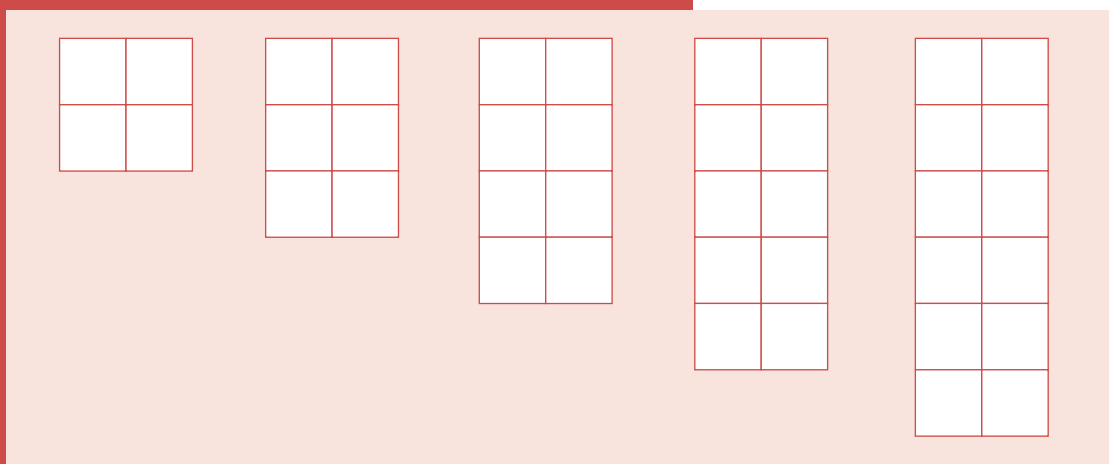
¿Qué procedimientos siguieron para saber cuántos octágonos tienen la figura 100?

Den a conocer sus procedimientos.

c) Un tercer equipo planteó también diseños de figuras como las siguientes:

Observen las figuras que representan la parte de una pared, tomen en cuenta que cada cuadrado tiene un *perímetro de 4 cm*.

¿Cuál será el perímetro de la figura que represente la pared 11 y la pared 50, sin que las tengas que dibujar? Con tu equipo responde.



Recomendaciones

- Se plantearán los problemas y se destinará un tiempo de la sesión para que los equipos trabajen, se les animará a que observen las sucesiones y contesten lo que se les pide.



- Se cuidará que vayan analizando las que ya se tienen y comenten entre ellos los procedimientos mediante los cuales llegaron a las respuestas.
- Tal vez los alumnos digan las formas por las que llegaron a encontrar las figuras que faltan, lo que el maestro aprovechará para que entre todos lleguen a la generalización de la regla, tomando en cuenta que n es la posición de la figura en la sucesión.
- Es muy importante que entre todos vayan descubriendo cómo llegar a las reglas que siguen cada una de las sucesiones presentadas.
- En esta actividad el maestro estará motivando a los alumnos a que observen, analicen, reflexionen y encuentren las relaciones que hay entre las figuras para poder encontrar las reglas.

SESIÓN 2. ¿Qué operaciones hace aquí la calculadora?

En esta clase los alumnos y el maestro siguen trabajando ejercicios de números y de figuras.

El maestro les mostró esta calculadora en la que se teclean algunas expresiones y se siguen obteniendo algunas sucesiones.

Reunidos en binas analícnlas y encuentren, ¿qué operaciones hace la calculadora?

- Escriban con sus palabras las operaciones que hace la calculadora.
- Elaboren una expresión que represente la regla de cada sucesión.
- ¿En qué lugar de la sucesión van las cantidades que están a la derecha de las segundas flechas?

1, 4, 9, 16... → 100, 121, 144...

8, 16, 24, 32... → 800, 8 000, 80 000...

3, 5, 7, 9... → 101, 201, 1001...

0, 1, 2, 3..... → 100, 101, 102,.....



Recomendaciones

- Después de que en la clase anterior los alumnos trabajaron algunas sucesiones tratando de encontrar algún lugar de la sucesión, ahora se les guiará a encontrar la expresión o regla que éstas siguen.
- Después del trabajo de binas, se hará el intercambio de ideas sobre las operaciones que creen que realiza la calculadora.
- Se motivará a los alumnos a que comuniquen verbalmente las operaciones o las reglas que encontraron para cada sucesión.
- Una vez que encontraron las reglas, se les pedirá que las apliquen para que encuentren otras posiciones.
- En estas actividades se busca que los alumnos trabajen de manera efectiva con modelos simples de situaciones complejas, usen habilidades de razonamiento en diferentes contextos, interpreten diferentes representaciones de una misma situación, analicen y apliquen relaciones cuantitativas así como a usar diferentes habilidades de cálculo para la solución de problemas.
- Se cerrará la clase observando que les quede claro a los alumnos cómo elaborar las reglas para algunas sucesiones y cómo aplicarlas para encontrar algunas posiciones que se les pida.

SESIÓN 3. Resolviendo sucesiones numéricas

Finalmente, el maestro Luis pidió a los alumnos que resolvieran algunos problemas donde se aplican las sucesiones numéricas, y dijo que va a dar puntos extras en la calificación a los equipos que los resuelvan bien.

Reúnanse en equipos de tres y propongan soluciones para los problemas planteados por el maestro.

a) En una finca en forma de trapecio hay plantadas 19 filas de naranjos, en la primera hay 39 árboles y en la última 93.

- ¿Cuántos naranjos tiene la finca?
- ¿Cuántos árboles hay en la fila central?

b) Escriban los primeros 5 términos de las siguientes sucesiones numéricas y analicen ¿cuáles números de la derecha forman parte de la sucesión?

REGLA	SUCESIÓN	¿Qué elementos forman parte de la sucesión?
$7n + 7$		57, 77, 700, 775
$3n - 1$		8, 89, 90, 91
$n + 2$		5, 10, 72, 81, 94,
$6n - 2$		4, 103, 118, 602
n^3		1, 8, 9, 27, 125, 625



Recomendaciones

- Esta tercera sesión tiene como finalidad que los alumnos observen algunas aplicaciones de las sucesiones numéricas y traten de resolver los problemas planteados.
- Con esta actividad se cierra la secuencia didáctica, por lo que es importante que se lleguen a conclusiones concretas acerca de: ¿cómo se obtienen los términos de una sucesión, los que siguen, el enésimo, etcétera?
- ¿Cómo se obtiene una posición de una sucesión? ¿qué reglas se están siguiendo en las sucesiones trabajadas?
- Con estos conocimientos y habilidades se trata de continuar con el desarrollo del pensamiento algebraico; se pueden enunciar las reglas primero verbalmente y luego de manera simbólica hasta llegar a la expresión algebraica usual donde n representa la posición.
- En esta secuencia se estarán trabajando los siguientes conocimientos y habilidades: primer grado, bloque I, apartado:
 - Construir sucesiones de números a partir de una regla dada.
 - Determinar expresiones generales que definen las reglas de sucesiones numéricas y figurativas.

Los comentarios sobre la evaluación de la secuencia son semejantes a los de la secuencia anterior.

III.- Recomendaciones para el trabajo con otros docentes

Los maestros aprenden haciendo, leyendo y reflexionando (de la misma manera que los estudiantes), a través de la colaboración con otros maestros, observando muy de cerca el trabajo de los estudiantes y compartiendo lo que observan. Este tipo de aprendizaje permite a los maestros pasar de la teoría a la práctica.

Linda Darling-Hammond y Milrey W. McLaughlin

La enseñanza de las Matemática se ha transformado en los últimos años, ya que debe responder a nuevas exigencias sociales y a los cambios que culturalmente se hacen en el mundo. A la asignatura, como disciplina teórica y parte del acervo cultural de la humanidad, se agregan las innumerables aplicaciones que se tienen en la vida cotidiana, en la ciencia y las diferentes ramas de la investigación y al surgimiento de nuevas propuestas didácticas sobre esta materia. Todo esto hace pensar en nuevas formas para que el alumno aprenda y aplique los conocimientos matemáticos en su vida cotidiana y, por consecuencia, el docente busque otras formas de enseñanza.

Esto amerita un cambio en el proceso de enseñanza-aprendizaje, de formas de estudio para que quien aprende pueda atender a las demandas que la sociedad le presenta. Por lo que los profesionales de la educación han de estar preparados para estos cambios.

Ser profesor es un trabajo complejo, pues ahora no basta conocer el tema y explicarlo a los alumnos sino que la profesión docente demanda



nuevas competencias para los maestros, como lo señala Philippe Perreoud en su escrito sobre las diez nuevas competencias para enseñar, que van desde organizar y animar situaciones de aprendizaje, gestionar la progresión de los aprendizajes, trabajar en equipo hasta organizar la propia formación continua, etcétera (SEP, 2006).

Estas competencias profesionales se van creando en la formación docente, pero también en el trabajo diario con los alumnos.

El Plan de estudios y el Programa de Matemáticas 2006 contemplan la formación de los docentes y el trabajo en el aula como una prioridad para el buen alcance del currículo, por lo que este último señala que “no basta que el maestro proponga a sus alumnos problemas interesantes para que reflexionen, sino que la escuela toda debe abrir oportunidades de aprendizaje significativo y para ello será de gran ayuda que los profesores compartan experiencias exitosas o no, pues hablar de ellas les permitirá mejorar permanentemente su trabajo” (SEP, 2006: 13).

Aquí cabe hacer una reflexión sobre el trabajo colegiado que ha de asumir un centro o una zona escolar donde los maestros comparten diariamente con sus alumnos y con sus compañeros.

El maestro que forma parte de un colectivo docente sabe que el trabajo en equipo favorece una mayor integración y especialización, e impulsa alternativas de acción:

- la ampliación del compromiso y la responsabilidad
- el aumento de los logros
- el acuerdo sobre los parámetros de calidad
- la resolución de más problemas
- la toma de decisiones más eficaces
- una mayor flexibilidad
- una ampliación del poder creativo y la autonomía,
- el aumento del sentido de los sujetos en su desempeño

Algunas sugerencias para el trabajo entre docentes:

- Compartir con los demás colegas el enfoque que le damos a la asignatura y verificar si vamos por el “rumbo” correcto.
- Analizar juntos el Plan de estudios, el Programa 2006 de Matemáticas y todos los materiales que se les proporcionen para tener bien claro hacia donde orientamos a nuestros alumnos.
- Autoevaluarnos a partir del dominio de las competencias docentes y proponernos metas concretas para mejorar.
- Elaborar un trayecto de formación de acuerdo a las necesidades de cada docente.
- Formar comunidades de estudio en el propio centro escolar donde los docentes se retroalimenten y se pueda profundizar en temas del programa en los que se tenga poco dominio.
- Buscar la ayuda de profesionales de las Matemáticas para que nos ayuden en algunos temas en particular.
- Intercambiar aspectos de metodología que nos hayan resultado exitosos, formas de evaluar y materiales didácticos que puedan enriquecer el trabajo del aula.
- Realizar, desde que se inicia el ciclo escolar, talleres para conocer material didáctico, en donde a cada docente se le comisione para



hacer algún material, se puedan intercambiar y todos los alumnos los puedan conocer.

- Analizar todo lo relacionado a los planes de clase, contestarlos, ver posibles dificultades, estar atentos a las consideraciones previas y seleccionar los materiales con los que nos vamos a apoyar, todo esto en trabajo colaborativo.
- Auto formarnos en aspectos de tecnología educativa, practicando el uso de la computadora, de las calculadoras, del Internet, emplear *software* educativo para enriquecer nuestras clases, analizar lo que nos proponen las páginas *Web*.
- Comunicar estrategias de trabajo en equipo que nos hayan dado buen resultado
- Elaborar un plan de lecturas de formación técnica de contenidos y pedagógica que analizaremos en cada reunión.
- Planear las formas de evaluación que vamos a aplicar en los diferentes aspectos en el transcurso del ciclo escolar, así como los instrumentos con los que se va a calificar.
- Formular los rasgos que vamos a emplear en la asignatura para observar las líneas de progreso del desarrollo de las competencias, así como los formatos que vamos a aplicar para este aspecto.
- Buscar estrategias de ayuda para aquellos alumnos que tengan dificultades con el trabajo en la asignatura, los reprobados en el año anterior, los que faltan a clases, los que están por desertar, los que no tienen apoyo de sus padres y los que no cumplen con tareas. En forma particular trabajar en cada caso e intercambiar ideas para mejorar estas situaciones.
- Planear algún proyecto con otras asignaturas y trabajar en él para fomentar la transversalidad de las competencias.
- Organizar formas de comunicación con los padres de familia, ya sea para solicitar su apoyo en los casos de alumnos que lo necesiten o bien para motivarlos a ayudar a sus hijos.
- Buscar las estrategias para formar una verdadera comunidad educativa donde participen todos los integrantes de nuestro centro escolar (alumnos, docentes, directivos, administrativos, padres de familia).
- Favorecer el diálogo con otros profesionales fuera de la escuela que por materia o por tema intercambien puntos de vista y comentarios que ayuden a la práctica docente.
- Formar redes de comunicación vía Internet con docentes de otras escuelas para enriquecernos mutuamente con sus experiencias.
- Establecer compromisos de ayuda mutua en relación a las prácticas áulicas, partiendo de las observaciones hechas por nuestros colegas y de los resultados que se vayan obteniendo en las evaluaciones programadas.
- Mostrar buena disposición para el cambio, si es necesario, o para desaprender, si la situación lo requiere, con base en los comentarios de nuestros compañeros.
- Permitir la evaluación entre colegas para discutir sobre la enseñanza y el aprendizaje.



- Asumir el papel de maestros investigadores de prácticas docentes innovadoras que ayuden al crecimiento de todos los profesores.
- Rediseñar las estructuras de la organización escolar de manera que promuevan activamente el aprendizaje y la colaboración y ayuden en los problemas de la práctica docente, propiciar espacios donde los maestros puedan trabajar y aprender juntos.
- Vivir procesos de autorregulación, que permitan que el docente reflexione junto con sus colegas sobre su trabajo para así enriquecerse y fortalecer su labor.

Son muchas las actividades que un colectivo docente puede emprender para mejorar, por lo que es buena medida que el maestro experimente tanto el rol de estudiante como de maestro, para que pueda enfrentar las dificultades que cada uno de estos roles requiere, también ayudará el trabajo de colaboración en la comunidad escolar en la que se desempeña, donde ha de estar dispuesto a compartir sus experiencias y a trabajar en equipo recibiendo las aportaciones de otros compañeros que le ayudarán a retroalimentar su trabajo áulico, con esto se busca tener mejores resultados de los alumnos tanto en el desempeño escolar como en el desarrollo de competencias.

No hay que olvidar que el profesional de la educación se apoya en la experiencia, en la formación continua y en la resolución colectiva de los problemas específicos que se le presentan, dando así respuesta a la sociedad que demanda alumnos competentes para la vida productiva.

Finalmente, se recuerda que desde que un maestro se integra a una escuela ya forma parte de ese equipo de trabajo y ha de tomar en cuenta que los equipos no son un fin en sí mismos, sino que son un medio para abordar o resolver un problema o cumplir un propósito determinado, en este caso elevar la calidad educativa de su escuela.

IV.- Recomendaciones para el trabajo con la familia

*Las Matemáticas no sólo se enseñan y se aprenden,
sobre todo se estudian y se usan*

Guía de Trabajo de Matemáticas, Reforma
en Secundaria 2006

Partiendo de esta afirmación, se recuerda que el estudio de las Matemáticas no sólo es un tema exclusivo de la escuela, sino que los ámbitos donde se utiliza se extienden hacia todas las actividades de la vida cotidiana, ahí los alumnos han de ser capaces de mostrarse competentes para aplicar los aprendizajes de esta y otras asignaturas y responder así a las necesidades que se les presentan.

Los padres de familia forman parte fundamental del acompañamiento que necesita el alumno en relación a la vida escolar. Es frecuente escuchar a los padres quejándose porque sus hijos no aprenden Matemáticas, o que reprobaron en esta asignatura. En relación al estudio de las Matemáticas, los padres de familia han de asumir un compromiso de apoyo a lo estudiado en la escuela. Algunas formas de llevar a cabo este seguimiento son:

- Ante todo, fomentar una actitud positiva hacia el estudio, hacia el trabajo escolar, dándose cuenta que ningún aprendizaje es difícil



si se pone empeño y se señalan metas a corto plazo y se practican estrategias para cumplirlas.

- Reforzar el aprecio por las propias capacidades de sus hijos, ante todo, sus capacidades matemáticas, a través de una motivación constante: si el alumno se equivoca, asumir el error como un medio para seguir aprendiendo.
- Estar pendientes en los cambios en la metodología en la enseñanza de la asignatura. Antes el docente explicaba la clase, los alumnos escuchaban y luego practicaban lo aprendido; ahora es el alumno quien interactúa con el problema que se le plantea y mediante un trabajo colaborativo de enriquecimiento permanente busca procedimientos que lo lleven a la respuesta de los problemas planteados, el alumno asume la responsabilidad de su propio aprendizaje y el maestro es un guía, un facilitador del estudio. Aquí los padres, desde el hogar, han de apoyar esta forma de asumir los aprendizajes.
- Enterarse que ahora el trabajo en el aula busca el desarrollo de competencias que se desarrollan tanto en la escuela a través de las asignaturas como en el hogar y en la vida social.
- El programa de educación secundaria tiene como meta un perfil de egreso en el que sobresale que el alumno desarrolle competencias para la vida. Los padres de familia han de conocer este perfil de egreso para que conozca el perfil de alumno que se busca.
- Facilitar a sus hijos el trabajo en algún proyecto que se emprenda en la escuela, ayudándolos a investigar, apoyándolos con los materiales que necesiten.
- Fomentar en sus hijos las ideas creativas que se pongan en práctica en las tareas y trabajos que se realicen.
- Resolver acertijos y ejercicios de habilidad mental para que sus hijos vayan poniendo en práctica procesos cognitivos.
- Estar pendientes de las tareas de sus hijos, investigaciones, resolución de problemas, etcétera, y apoyarlos hasta donde sea posible.
- Aprovechar las oportunidades que se presenten para guiar a su hijo hacia la reflexión, el cálculo mental, la argumentación, la comunicación de ideas sobre la solución de situaciones problemáticas.
- Tener en casa materiales de lecturas interesantes para sus hijos y motivarlos a leerlos, tal vez con el propio ejemplo.
- Aprovechar los medios de comunicación para que sus hijos estén enterados de los que sucede a su alrededor, sobre todo en aspectos culturales, científicos y tecnológicos. Leer notas periodísticas, interpretar gráficas y/o tablas sobre juegos, equipos, etcétera.
- Proveer, en la medida de lo posible, de materiales de tecnología educativa (computadoras, calculadoras, Internet) y de oportunidades para que sus hijos a través de estos medios investiguen, conozcan y apliquen los conocimientos.
- Permitir que sus hijos realicen cálculos de las compras de la semana, o de los gastos del hogar para que desarrollen sus habilidades de conteo y cálculo básicos.



- Apoyar a sus hijos en el planteamiento de un proyecto de vida, donde el estudio sea una parte fundamental de sus metas.
- Dar confianza a su hijo para que reconozca sus habilidades para aprender cualquier asignatura, si se lo propone. Tener un cuaderno de notas donde, en familia, se escriban las metas que se desean alcanzar en el ciclo escolar y revisarlo continuamente para ver si se están logrando.
- Conocer, a tiempo, los logros y las deficiencias de sus hijos a través de las evaluaciones que se realizan en la escuela para que, si es necesario, apoyarlos de una manera más cercana cuando sus hijos estén fallando en alguna asignatura.
- Mantener una constante comunicación con los maestros y con la escuela en general, pues finalmente padres, maestros y comunidad forman un equipo de apoyo para los estudiantes.
- Propiciar ocasiones donde se reflexione sobre el avance que se está teniendo en la formación escolar y familiar, para que el joven tenga una autorregulación constante.

Sin duda, es el alumno quien, con su esfuerzo y buena voluntad, va a salir adelante y cumplir las metas que se proponga pero requiere del apoyo de los adultos que lo rodean para salir adelante de la educación básica, y los padres de familia juegan un papel fundamental, como ya lo hemos anotado, en este periodo de la educación de sus hijos.

V.- Recomendaciones sobre artículos o lecturas para los docentes

- Bonals, J. (1996). *El trabajo en equipo del profesorado*. Barcelona: Graó.
- Collazos, C., L. Guerrero, A. Vergara (2001). *Aprendizaje Colaborativo: un cambio en el rol del profesor*. Memorias del III Congreso de Educación Superior en Computación, Jornadas Chilenas de la Computación, Punta Arenas, Chile. Disponible en: <http://www.dcc.uchile.cl/~luguerre/papers/CESC-01.pdf>
- Darling-Hammond, L. y W. McLaughlin (2003). El desarrollo profesional de los maestros. Nuevas estrategias y políticas de apoyo. *Cuadernos discusión*. (9). México.
- Harasim, L.; R. Hiltz, R. Turoff y L. Teles (2000). *Redes de aprendizaje. Guía para la enseñanza y el aprendizaje en red*. Gedisa. Barcelona
- Historia de Matemáticos Famosos: <http://www.mat.usach.cl/histmat/html/indice>
- INEE (2006). *La calidad de la educación básica ayer, hoy y mañana. Conclusiones del Informe Anual sobre la Calidad de la Educación Básica en México 2006*. México: INEE.
- INEE (2005). *PISA para docentes. La evaluación como oportunidad de aprendizaje*. México: INEE.
- Ministerio de Educación de Chile (2006). *Estándares en Tecnología de la Información y la Comunicación para la Formación Inicial Docente*. Chile: Ministerio de educación.
- Murillo, F. (2003). El movimiento de investigación de Eficacia Escolar. En: Murillo, F. J. (Coord.). *La investigación sobre Eficacia Escolar en Iberoamérica. Revisión internacional del estado del arte*. Bogotá: Convenio Andrés Bello.



- Murillo, F. (2004). Un marco comprensivo de mejora de la eficacia escolar. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Disponible en: <http://www.comie.org.mx>
- OREALC-UNESCO. *El derecho a una educación de calidad para todos en América Latina y el Caribe*. pp. 11-19.
- Página del profesor de Matemáticas Antonio Pérez: <http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/>
- Recursos didácticos de la S.A.E.M.Thales: <http://thales.cica.es/>
- Salinas, J. (1997). Nuevos ambientes de aprendizaje para una sociedad de la información. *Revista Pensamiento Educativo*. Chile: PUC.
- Schmelkes, S. (1997). Educación para la vida: Algunas reflexiones en torno al concepto de relevancia de la educación. En: *Ensayos sobre educación básica*, Documento DIE 50, DIE-CINVESTAV, IPN, México.
- Surdo, E. (1998). *La magia de trabajar en equipo*. Buenos Aires: Granita.
- SEP. Consejo de Especialistas para la Educación. *Los retos de México en el futuro de la educación*. SEP, México, 2006.
- UNESCO (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe Mundial*. Ediciones UNESCO.
- Unidades Didácticas del Proyecto Descartes: <http://www.cnice.mecd.es/Descartes/>



ANEXO

RESPUESTAS DE LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS

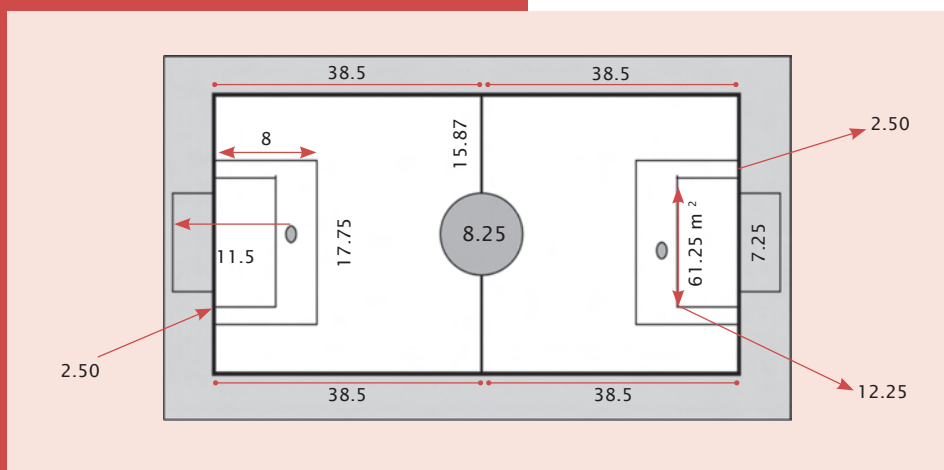
SECUENCIA: Construyendo la cancha de fútbol para una escuela

Sesión 1

- a) 960 metros cuadrados para las bancas, 600 metros cuadrados para baños y bebederos.
- b) $4800 - (1/5 \times 4800) + (1/8 \times 4800)$
- c) 3 240 metros cuadrados.

Sesión 2

- a) Los alumnos diseñarán de acuerdo a las medidas, el estacionamiento en un terreno rectangular de 160 metros cuadrados, cada equipo hará su propio diseño y se elegirá como el mejor al que haya respetado las condiciones y optimizado el terreno.
- b) La cantidad de carros dependerá del diseño que hayan hecho los equipos.
- c) Las medidas aproximadas serían:



Sesión 5

- a) 15 kilogramos de cal para el perímetro.
- b) 165 vasos; su ganancia será de \$695.
- c) Ocupan para todos los banderines 105 metros de listón verde y 84 metros de listón amarillo.
- d) No sobró nada de terreno.

SECUENCIA: Ejercicios con números y figuras

Sesión 1

- a) Sí



- Porque al realizar la operación da como resultado un número impar.
- Ejemplos:
- b) $1+2= 3$ $6+7= 13$ $8+7= 15$
- c) Figura 10: 19 octágonos.
- d) Figura 100: 199 octágonos.
- e) Fórmula: $2n - 1$, donde "n" es la posición.
- f) Fórmula $2n + 6$, donde "n" es la posición.
 Pared 11: Perímetro 28
 Pared 50: Perímetro 106

Sesión 2

Sucesión

Fórmula

1, 4, 9,16...100,121,144...	n^2 donde "n" es la posición
8, 16, 24,32...800,8 000, 80 000...	$8n$ donde "n" es la posición
3, 5, 7,9...101,201, 1 001...	$2n + 1$ donde "n" es la posición
0,1,2,3...100,101,102...	$n-1$ donde "n" es la posición

Sucesión y lugar de la sucesión:

Primera sucesión	Segunda sucesión	Tercera sucesión	Cuarta sucesión
100, posición 10	800, posición 100	101, posición 50	100, posición 101
121, posición 11	8 000, posición 1000	201, posición 100	101, posición 102
144, posición 12	80 000, posición 10 000	1 001, posición 500	102, posición 103

SESIÓN 3

- a) La finca tiene 1254 naranjos
- b) Hay 66 árboles en la fila central (fila 10)

REGLA	SUCESIÓN	¿Qué elementos forman parte de la sucesión?
$7n + 7$	14, 21, 28, 35,42...	57, <u>77</u> , <u>700</u> , 775
$3n - 1$	2, 5, 8, 11,14	<u>8</u> , <u>89</u> , 90, <u>91</u>
$n + 2$	3,4,5,6,,7	<u>5</u> , <u>10</u> , <u>72</u> , <u>81</u> , <u>94</u> ,
$6n - 2$	4,10,16,22,28	<u>4</u> , 103, <u>118</u> , 602
n^3	1,8,27,64,125,216	<u>1</u> , <u>8</u> , 9, <u>27</u> , <u>125</u> , 625





**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL CONTENIDO
CAMBIO Y RELACIONES**
Demetrio Garmendia Guerrero

I. Secuencia didáctica

... consideramos que los docentes tienen derecho a contar con propuestas que funcionen, con recursos utilizables sin mayores sofisticaciones. Pero analizarlos e insertarlos en su proyecto son prácticas docentes indelegables e insustituibles.
Cecilia Parra e Irma Saiz

Partimos del entendido de que una secuencia didáctica consiste en una sucesión de ejercicios adecuadamente organizados, desde el punto de vista de sus niveles de complejidad y profundidad, que se orientan a lograr un objetivo o propósito didáctico determinado con un grupo de alumnos. Siendo consecuentes con la definición anterior, se plantea la siguiente secuencia didáctica cuya finalidad es desarrollar los conocimientos y habilidades formulados en el apartado 1.6 de tercer grado (representación de la información en gráficas) del programa vigente de Matemáticas. Se sugiere que la secuencia se divida en al menos tres sesiones, sin que esto sea una condición inflexible.

Contenido: Cambio y relaciones

Sesiones: tres

Contexto: Público

Propósito: analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.

Aprendizajes esperados:

Que los alumnos:

- sean capaces de elegir la información pertinente para la resolución del problema.
- puedan expresar con ecuaciones el problema.
- verifiquen la corrección y pertinencia de la expresión algebraica.
- puedan variar los datos del planteamiento inicial para modificar las expresiones matemáticas.
- elaboren las gráficas correspondientes.



Procesos involucrados: reproducción, conexión y reflexión

Habilidades que se van desarrollando: resolución de problemas, argumentación, manejo de técnicas, comunicación.

¿Por cuál nos decidimos? (Tarifas de la compañía telefónica)

Sesión 1

Propósito de la sesión: que los alumnos sean capaces de discriminar la información útil de la innecesaria en situaciones cotidianas y puedan expresar mediante una ecuación el problema que se les plantea para, mediante esa ecuación, constaten que la expresión algebraica es correcta al permitirles contestar una serie de preguntas.

Desde hace tiempo la familia Hernández ha estado pensando en contratar un servicio de telefonía doméstica. La mamá de Francisco recibió recientemente un folleto publicitario donde se presenta la información de la *Compañía A* y los servicios que ofrece. Ella le pidió a su hijo que le ayudara a decidir cuál paquete les convendría contratar.

La empresa ofrece tres paquetes.

Básico:

- a) Costo de instalación: \$1 000 por una línea o \$389 por cada línea contratada, si se contratan dos o más líneas.
- b) Renta mensual: \$250
- c) Costo por llamada: \$1.70
- d) Conexión a Internet: \$250 mensuales

Intermedio:

- a) Costo de instalación: \$1 000 por una línea o \$289 por cada línea contratada, si se contratan dos o más líneas.
- b) Renta mensual: \$400
- c) Costo por llamada: \$1.55
- d) Conexión a Internet: \$199 mensuales

Intensivo:

- a) Costo de instalación: \$1 000 por una línea o \$150 por cada línea contratada, si se contratan dos o más.
 - b) Renta mensual: \$550
 - c) Costo por llamada: \$0.45
 - d) Conexión a Internet: sin costo
1. *Plantea mediante una expresión algebraica las condiciones de cada paquete y verifica que la expresión matemática obtenida sea la correcta.*
 2. *¿Puedes decir en cuál de los paquetes el costo por llamada es más barato? Justifica tu respuesta.*
 3. *¿Cuál es la constante de proporcionalidad de cada paquete?*

Sugerencias didácticas

En esta primera sesión es conveniente que el profesor divida a la clase en equipos de cuatro a seis alumnos. En cada uno de ellos debe propiciar que se discuta al interior de los grupos el tipo de información que no es útil. Cuando hayan llegado a un consenso sobre este punto, debe reforzar en los alumnos la habilidad de argumentación pidiéndoles que expre-



sen las razones que tuvieron para desechar o tomar en cuenta algún dato del planteamiento.

El profesor habrá de alentar en todo momento a los alumnos a que se dé una discusión colectiva dentro de cada equipo abordando al principio el problema de manera intuitiva. El profesor debe asegurarse de que en cada grupo se haya hecho una selección correcta de los datos.

Una vez que los alumnos hayan discriminado la información, el maestro podrá orientarlos en la construcción de la expresión matemática (ecuación) haciéndolos reflexionar con preguntas como:

¿Qué tipo de expresión necesitan para que refleje los datos del problema?

- a) ¿Cuántas variables tendrá su expresión?
 - b) ¿Cuál sería la variable dependiente?
 - c) ¿Cuál sería la variable independiente?
- O de manera alternativa, podría preguntar...
- d) ¿Cómo se expresaría el costo de cada llamada en cada uno de los paquetes?
 - e) ¿Qué tipo de ecuación obtuvieron?

Resulta conveniente que el maestro ayude a que los alumnos profundicen en su trabajo de construcción de conocimiento al plantear, de acuerdo con el avance que los alumnos tengan respecto al objetivo propuesto, preguntas que les exijan pasar de los procedimientos intuitivos a los procedimientos expertos. Por ejemplo, el profesor puede pedir que ya obtenida la expresión matemática adecuada, los alumnos contesten las siguientes preguntas:

- a) Si las llamadas mensuales de la familia Hernández son más de 100 pero menos de 180, ¿cuál paquete le resulta más barato?
- b) Si hacen más de 200 llamadas pero menos de 300, ¿cuál plan les convendría?
- c) Si la familia Hernández tuviera necesidad de dos líneas telefónicas y en promedio hiciera 75 llamadas por línea, ¿qué paquete le conviene?
- d) Si decidieran contratar dos líneas, el paquete que escogieron de acuerdo con lo dicho en los incisos c) y d), ¿seguiría siendo el más barato? Justifica tu respuesta. Si no fuera así, expón las razones.

Todas estas preguntas tienen el objetivo de que los alumnos tengan oportunidad de ejercitar el algoritmo que acaban de obtener y al mismo tiempo probar si la ecuación es correcta. Si el maestro decidiese seguir planteando estas preguntas entonces deberá organizar a los grupos para que primero trabajen en la obtención de la respuesta y, una vez obtenida ésta, se presente de manera grupal de tal forma que los demás alumnos puedan tener la oportunidad de validar o corregir su respuesta.

La respuesta a la tercera pregunta servirá más adelante como vínculo entre el concepto de razón de cambio y su gráfica. En esta primera sesión sólo se requiere que determinen la constante correspondiente a cada paquete. En la tercera sesión se pedirá que comparen el efecto de modificar una variable sobre la pendiente de su respectiva gráfica.



Sesión 2

Propósito de la sesión: que sean capaces de modificar la expresión algebraica que modele una situación determinada, cuando los datos varían y elaborar la gráfica de cada una de ellas.

Recientemente uno de los hermanos de Francisco se fue a vivir a otro estado de la República Mexicana. Al principio no se fijaron en las tarifas para llamadas de larga distancia que les ofrecía la compañía, pero al pedir información les dijeron lo siguiente:

Básico:

a) Larga distancia nacional: \$3.30 por minuto

Intermedio:

a) Larga distancia nacional: \$2.80 por minuto

Intensivo:

a) Larga distancia nacional: 1.30 por minuto

1. ¿Cómo modifica lo anterior cada una de las expresiones algebraicas que obtuviste antes?
2. Con toda la información que has recabado, elabora una tabla para cada paquete y construye su gráfica correspondiente. Utiliza un mismo plano cartesiano para las tres gráficas diferenciando cada una con un color distinto.
3. Describe el procedimiento que utilizaste para hacer cada una de las gráficas.

Sugerencias didácticas

El maestro quizá considere que para el primer punto de esta sesión sea mejor que sus alumnos trabajen de manera individual, ya que de ese modo se ven forzados a poner a prueba su comprensión del tema.

Para la segunda pregunta tal vez sea necesario, por consideraciones de tiempo, que en la clase se trabaje la construcción sólo de una gráfica.

En estas situaciones es cuando el uso de la herramienta didáctica conocida como *Portafolio* resulta idóneo en caso de que se dejara como tarea la construcción de más gráficas, pidiendo a los alumnos que las entreguen hasta finalizar la totalidad del bloque correspondiente a estos conocimientos y habilidades. De este modo puede constatarse el avance en la comprensión del concepto de este apartado, ya que en clase la primera gráfica se elaborará cuando varios conceptos se presentan por primera vez, en tanto que la tarea reflejará la asimilación del aprendizaje al construir las otras dos gráficas, una vez que hayan tenido tiempo de madurar tales habilidades y conocimientos y hayan visto otros conceptos.

Evidentemente el tercer punto tiene que trabajarse de forma individual, pues lo importante aquí es que los alumnos desarrollen sus habilidades comunicativas.

Para finalizar, el profesor debe alentar, de nueva cuenta, a que los muchachos ejerciten sus habilidades de razonamiento al plantear todas o algunas de las siguientes preguntas.

- a) ¿Algunas de las rectas pasa por el origen? Justifica tu respuesta.
- b) ¿Las rectas se intersecan en algún punto? En caso afirmativo, determina el punto de intersección.
- c) ¿Qué recta está más inclinada?



- d) ¿Qué recta está más vertical?
 e) Suponiendo que en el eje x pusiste el número de llamadas, ¿qué recta representa el costo por llamada más barato?

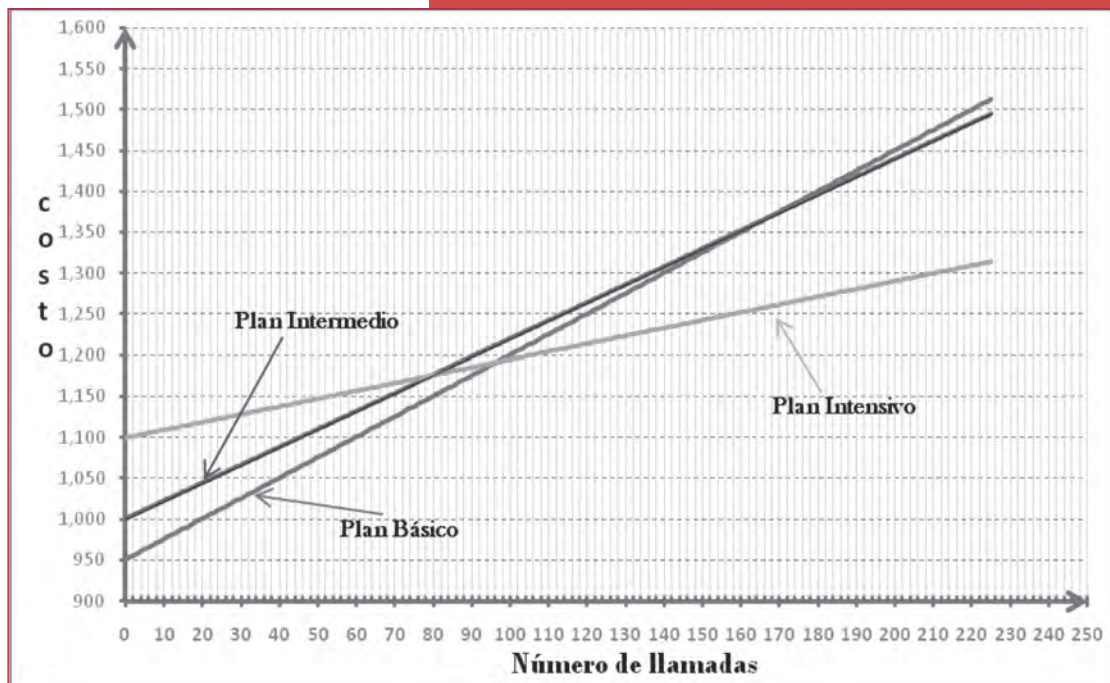
Conviene que estas preguntas se trabajen bajo la modalidad de discusión grupal, pues de esa forma la clase estaría participando activamente al desarrollar sus habilidades de argumentación, ya que el profesor exhortará que cada respuesta deba argumentarse.

Sesión 3

Propósito de la sesión: que se percaten de las consecuencias de variar los valores del eje x y luego los del eje y, y que relacionen estas modificaciones con los cambios que experimentan las pendientes de sus respectivas rectas.

De acuerdo con la siguiente gráfica, contesta las preguntas.

- a) ¿A partir de qué número de llamadas el paquete Básico es más caro que el Intermedio?
 b) ¿Cuánto cuesta cada llamada en el paquete Intermedio?
 c) ¿Cuál es el costo por llamada de cada uno?
 d) ¿Por qué no se intersecan las tres rectas en un punto?



Sugerencias didácticas

Puesto que ya hicieron el análisis de los cambios a través de las expresiones algebraicas, se les pedirá ahora que empiecen a hacer el mismo análisis, pero ahora recurriendo únicamente a las gráficas. En esta última sesión se podría trabajar de manera ideal incorporando cabalmente el uso de las TIC (tecnologías de la información y la comunicación); es decir se puede emplear un programa de hoja electrónica de cálculo que tenga funciones graficadoras dinámicas. En caso de que el docente cuente con lo necesario (el *hardware* y un conocimiento a nivel intermedio del *software*), la sesión será muy enriquecedora, ya que podría comenzar enseñándoles a los alumnos desde la simple introducción de datos en la hoja electrónica, hasta la forma de obtener gráficas a partir de los datos introducidos y la forma en que se modifican conforme cambian los datos.

Si no se cuentan con las condiciones ideales arriba expuestas, entonces lo que procede es echar mano de herramientas más usuales y tradicionales. Por ejemplo, uno de los equipos pasará al pizarrón para dibujar una gráfica explicando y justificando cada paso que den.

Se sugiere que toda esta sesión se trabaje en equipos, para lo cual deben dedicarse al menos treinta minutos para la discusión y el análisis de cada pregunta al interior de cada equipo. El tiempo restante (veinte minutos) se podría aprovechar para la discusión grupal.

Esta sesión tiene varios momentos: la elaboración de la gráfica, el análisis propio de las gráficas y el análisis del impacto de la variación de los datos en su correspondiente gráfica.

1. *Construcción de la gráfica.* En este momento el profesor debe tener especial cuidado de que los alumnos lleven a cabo correctamente los procedimientos para la elaboración de la gráfica, a saber, que la tabulación sea la apropiada, que no hayan cometido errores al calcular mediante la fórmula los valores de la variable dependiente, que los ejes tengan la escala adecuada, que los valores de la tabla se traduzcan correctamente para dibujar la gráfica, etcétera. Si el maestro se percatase que el grupo en general tiene errores en la construcción de la tabla, entonces será necesario hacer un paréntesis a fin de revisar la causa de esos errores.
2. *Análisis de las gráficas.* El maestro podría aprovechar este momento para plantear al equipo participante una serie de cuestionamientos con el objeto de que los alumnos describan cada uno de los pasos que siguieron.

Una vez que el equipo que está en el pizarrón haya terminado de dibujar la gráfica, el docente podría, a fin de alentar la discusión y el análisis del comportamiento de las gráficas conforme se varían algunos de los datos, plantear a todo el grupo las siguientes preguntas. Este paso es la preparación para la culminación de la secuencia didáctica.

- a) ¿Qué significa que una recta esté más inclinada que otra?
- b) ¿Cómo interpretas la intersección de las rectas?
- c) ¿Qué se necesita para que las tres rectas coincidan en un punto?
- d) A la larga, ¿cuál es el plan más caro? ¿por qué?
- e) ¿Qué tendría que modificarse para que el plan Intermedio fuera más



barato que el Básico después de las 190 llamadas? ¿Cómo se refleja esta modificación en la gráfica?

- f) ¿En qué momento conviene más un plan que otro? ¿Por qué?
- g) ¿En qué plan cuesta menos hacer 200 llamadas?
- h) Si el costo de instalación fuera de \$950 para todos los planes, ¿cómo se modificarían las rectas?

3. *Análisis de la relación entre la variación de datos y el cambio en la pendiente.*

Este momento es el que indudablemente consumirá más tiempo e implicará el mayor esfuerzo por parte del maestro y de los alumnos. Hay que hacer un análisis minucioso de la forma que el cambio de los valores en cualquiera de los ejes afecta la pendiente de la recta. Se puede comenzar cambiando, mediante la fórmula, los valores de la variable dependiente y dirigir la atención de los alumnos hacia el modo en que esto va alterando la posición de la recta en el plano cartesiano. También puede procederse de manera inversa, modificando la posición de la recta y procurando que los alumnos se percaten de que esa variación alterará los valores e incluso la ecuación de la recta. Asimismo, el profesor habrá de inducir a los estudiantes a que deduzcan lo que significa que una recta esté *menos inclinada* (o se asemeje más al eje x), o lo que nos indica que una recta sea *más vertical* (o tienda hacia el eje y).

II. Recomendaciones para el trabajo con otros docentes

El concepto de competencia representará aquí una capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones.

Philippe Perrenoud

En los talleres de implantación del Programa 2006 de Matemáticas, resultó evidente que los profesores no eran ajenos al contenido del mismo, pues éste experimentó pocas variaciones respecto al plan de 1993. Sin embargo, lo que se hizo patente fue la confusión entre lo que el programa de 1993 planteaba como enfoque y lo que los maestros ponían en práctica en su quehacer cotidiano. Desde 1993 se introdujo en la asignatura de Matemáticas la metodología que se basa en la resolución de problemas. Empero, esta metodología se interpretó, generalmente, como una serie de técnicas para la resolución de problemas... nada más ajeno a esta didáctica. A fin de subsanar esta confusión, el programa de 2006 ha puesto especial atención a la difusión y práctica de la didáctica de las Matemáticas que animan al nuevo plan de estudios.

El enfoque aclara que se pretende aprender *a través* de la resolución de problemas. Es decir, el problema o situación problemática constituye un medio y no un fin en la enseñanza de las Matemáticas, o en otras palabras, no se enseña a resolver problemas y reproducir las técnicas para su resolución. Más bien, se afirma que el fin es lograr el desarrollo de competencias por parte de los alumnos al plantearles situaciones problemáticas; que ellos sean capaces de aplicar a su contexto social los conocimientos matemáticos adquiridos en su educación básica; que tengan un



manejo satisfactorio de los algoritmos básicos de las Matemáticas y que hayan adquirido los rudimentos de una metodología científica (plantear problemas, poner en juego sus conocimientos para traducirlos a problemas matemáticos, utilizar satisfactoriamente operaciones matemáticas, comprobar que sus hipótesis –traducidas a expresiones matemáticas– sean correctas y por último a expresar claramente sus resultados).

Este giro conlleva un cambio radical en la concepción misma del papel del maestro y también en la gestión de clase, pues el enfoque exige la puesta en práctica de nuevas habilidades y competencias por parte del docente. Ahora el maestro se enfrenta ante la perspectiva de tener que aprender, poner en práctica y dominar aspectos pedagógicos que, o bien ya se conocían pero habían sido hechos a un lado como conceptos meramente abstractos, o bien los profesores se topaban por primera vez con ellos como elementos concretos y cotidianos que inciden en la apropiada conducción de la clase.

Hoy en día el profesor tiene que conocer y dominar a fondo conceptos asociados con la gestión de clase. Por ejemplo, debe saber lo que es la puesta en común y cómo conducirla, tener la capacidad de discriminar de entre todas las propuestas de los alumnos lo que es pedagógicamente relevante para lograr los aprendizajes esperados y para evitar la dispersión de los estudiantes. Debe aprender y enseñar a trabajar y discutir en pequeños equipos y también involucrar a todo el grupo en una discusión colectiva que al final logre capitalizar la riqueza de la diversidad de opiniones surgidas en la clase. Además, lo anterior no implica que deba olvidarse de lo que tradicionalmente ha estado haciendo, como por ejemplo, supervisar el trabajo individual de los alumnos.

Asimismo, tiene que mostrar su dominio de las técnicas de discusión y transmitírselas a sus alumnos para que ellos mismos las pongan de inmediato en práctica, clase con clase. Habrá de conocer y valerse de la riqueza que proporcionan herramientas como el *portafolio* a las tareas de evaluación del aprendizaje. El maestro habrá de hacer una transformación radical de la concepción del error y de la manera en que puede ayudar a su labor docente.

Por otra parte, el maestro se ve forzado a cambiar su concepción misma del papel que desempeña en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues ahora él ya no es el único que proporciona los conocimientos, ya no es el que incuestionablemente tiene la verdad y la disemina a sus alumnos; al contrario, debe asumir un papel mucho más modesto, pero paradójicamente más importante, en la producción del conocimiento matemático. Ahora debe ser un agente facilitador en la tarea de construir, junto con sus alumnos, este conocimiento. El tener un mayor dominio de la materia le permite advertir a la clase que las diversas estrategias para un problema no siempre sirven para todos los problemas. Debe ayudar a que sus alumnos trasciendan los conocimientos intuitivos y dominen los procesos expertos. El profesor tiene la enorme responsabilidad de que sus alumnos no sólo puedan tener un manejo algorítmico del conocimiento matemático, sino que vayan más allá y conciban a las Matemáticas como una herramienta que les sirva para afrontar problemas cotidianos; asimismo, habrá de empeñarse en que el aprendizaje de las Matemáticas en el ciclo básico de la educación proporcione a sus alumnos una meto-



dología que les permita aprender por sí solos y que les ayude a distinguir y evaluar críticamente la información que reciben día con día.

Todo lo anterior tiene como propósito fundamental que los alumnos lleguen a ser capaces de producir autónomamente el conocimiento y aplicarlo a su realidad cotidiana a fin de entenderla de una manera crítica y científica con el objeto de transformarla. Resulta comprensible que estas abrumadoras exigencias no pueda afrontarlas por sí solo el docente. En consecuencia, este cambio en el rol del profesor conlleva una serie de acciones que pueden clasificarse en tres tipos.

1. *En lo individual.* El profesor tiene varias opciones al alcance de su mano para actualizarse y conocer lo más reciente de la didáctica de las Matemáticas. Por ejemplo, la Secretaría de Educación Pública ha editado una colección titulada *Biblioteca para la actualización del maestro*, la cual constituye una herramienta fundamental para profundizar en los distintos aspectos que son inherentes al enfoque de la didáctica de las Matemáticas. Por esta razón, la mencionada colección tiene un lugar destacado en la bibliografía que se da más adelante. Otra actividad que el profesor puede llevar a cabo de manera individual es consultar regularmente la página de la SEP correspondiente a la reforma de la educación secundaria (en particular en la asignatura de Matemáticas), en donde también encontrará una enorme cantidad de material de apoyo tanto para su formación teórica como para el enriquecimiento de métodos y de sugerencias didácticas, todo lo cual está plasmado en forma de planes de clase, en boletines trimestrales llamados *Un reto más* y en la antología de Matemáticas que la SEP ha puesto en línea. También se sugiere que el docente navegue con frecuencia en sitios dedicados a la didáctica de las Matemáticas (en la bibliografía se sugieren algunos de estos sitios).
2. *En lo colectivo.* El profesor puede optar por discutir con otros colegas de su centro de trabajo diversos aspectos del enfoque con el objeto de perfeccionar su gestión de clase. También podrían darse a la labor de hacer en un principio reuniones informales en donde se analizaran de manera crítica la propuesta de la SEP (en particular los obstáculos que cotidianamente enfrentan en su centro de trabajo y en el salón de clases) con la finalidad de afrontar ya no en lo individual, sino de manera colectiva, los problemas prácticos de su trabajo. Estos encuentros informales podrían convertirse a la larga en reuniones colegiadas de su centro de trabajo, en las cuales se incluyeran a maestros de otras asignaturas. Este mismo grupo de profesores impulsaría diversas actividades como la publicación de boletines, la organización de concursos en la escuela, etcétera.
3. *En lo institucional.* Los maestros deben hacerse escuchar para que a través de los centros de maestros puedan tener acceso tanto a cursos, diplomados y materiales audiovisuales y didácticos que les faciliten superar los obstáculos detectados en discusiones con los demás colegas de sus centros de trabajo. Sería conveniente que los asesores técnico-pedagógicos reorientaran su actividad a fin de dar cauce a las propuestas surgidas directamente de los maestros ante grupo. Asimismo, la SEP puede poner a la disposición de los docentes los recursos para que no sólo se lleven a cabo las actividades mencionadas en



su modalidad presencial, sino por medio de la utilización de Internet al poner en línea una gama de actividades académicas. Por último, el proyecto de carrera magisterial se revitalizaría si pudiese incorporar todas estas inquietudes y las plasmara en cursos con valor curricular que pudieran mejorar el desempeño de los maestros ante grupo. También sería conveniente que fuese sensible ante la nueva realidad a la que se enfrenta el docente, y en general el sistema nacional de educación básica, al contar con instrumentos de evaluación internacionales (PISA) y nacionales e incorporara al proyecto de carrera magisterial una variedad de cursos acordes a la nueva situación.

III. Recomendaciones sobre artículos o lecturas

Libros

Para docentes

- Astolfi, J. (2004). *El "error", un medio para enseñar*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Batanero, M. et al. (1998). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Casanova, M. (1998). *La evaluación educativa. Escuela básica*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Clark, D. (2002). *Evaluación constructiva en matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chevallard, Y. et al. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Gardner, H. (1997). *La mente no escolarizada. ¿Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar en las escuelas?* México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Hargreaves, A. et al. (2000). *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Prentice Hall.
- Ifrah, G. (2000). *Historia universal de las cifras*. México: SEP (Edición especial para bibliotecas de las escuelas normales y centros de maestros). Volúmenes I y II.
- McFarlane, Á. (2003). *El aprendizaje y las tecnologías de la información*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- O'Brien, T.; Guiney, D. (2005). *Atención a la diversidad en la enseñanza y el aprendizaje*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. México: SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- SEP (2000). *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*. México: SEP.
- SEP (2000). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*. México: SEP.
- SEP (2006). *Matemáticas. Antología. Primer taller de actualización sobre los programas de estudio 2006. Reforma de la educación secundaria*. México: SEP.



Zavala, V. (2008). *La práctica educativa. ¿Cómo enseñar?* Barcelona: Graó/Colofón.

Para alumnos y padres de familia

Gardner, M. (1988). *Matemáticas para divertirse*. Buenos Aires: Granica Ediciones.

Perelman, Y. (1965). *Matemáticas recreativas*. Moscú: Mir.

Tahan, M. (1992). *El hombre que calculaba*. México: Limusa.

Artículos

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12 (1). pp. 5-38.

Balbuena, H. (1998). Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria. *ME-CINVESTAV*.

Balbuena, H. (1999). ¿De buscar estrategias de solución para aprender matemáticas o de memorizar respuestas? *Un reto más*. 5.

Block, D. (1987). *Estudio didáctico de la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria*. Tesis de maestría. DIE-CINVESTAV. México: IPN.

Sitios en Internet

Para docentes

http://www.profesorenlinea.cl/swf/links/frame_top.php?dest=http%3A//www.profesorenlinea.cl/cursos/7matematicas.html

<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm>

http://www.matematicastyt.cl/Graficas_de_Funciones/Lineales

<http://www.terra.es/personal/hypatiade/problemas.htm>

<http://www.snarkianos.com/conocidos.html>

<http://bc.inter.edu/facultad/ntoro/FUNCIONES.htm>

Para alumnos y padres de familia

<http://www.juegosycreatividad.com.ar/>

<http://www.buscoacertijos.com/>

<http://www.sectormatematica.cl/recreativa.htm>



ANEXO

A continuación se ofrecen los planes de clase correspondiente a la secuencia didáctica que se acaba de desarrollar, para que el maestro se percate de que lo que se ofreció no es sólo un ejercicio teórico, sino más bien es un esfuerzo que puede traducirse a una clase cotidiana, para lo cual se utiliza una herramienta con la que los profesores de matemáticas de secundaria han llegado a familiarizarse: los planes de clase.

Plan de clase (1/3)

Escuela: _____

Fecha: _____

Profr(a): _____

Curso: Matemáticas 3 Apartado. 1.6 Eje temático: Manejo de la información

Conocimientos y habilidades: expresar mediante una ecuación el problema planteado y constatar que es correcta.

Intenciones didácticas: que los alumnos sean capaces de discriminar la información útil de la innecesaria.

Consigna: la clase se dividirá en grupos que tengan al menos cuatro integrantes. Es importante que se permita a los alumnos tener una primera aproximación intuitiva del problema y partir de ahí para que al final de la clase logren una formulación matemática de la situación. Se compararán las aproximaciones intuitivas más representativas de la clase con la formalización matemática resultante.

Tu familia necesita contar con un servicio telefónico. En tu comunidad hay dos compañías que lo ofrecen. Al solicitar información a las dos empresas les dieron los siguientes planes.

La empresa ofrece tres paquetes.

Básico:

- a) Costo de instalación: \$1 000 por una línea o \$389 por cada línea contratada, si se contratan dos o más líneas.
- b) Renta mensual: \$250
- c) Costo por llamada: \$1.70
- d) Conexión a Internet: \$250 mensuales

Intermedio:

- a) Costo de instalación: \$1 000 por una línea o \$289 por cada línea contratada, si se contratan dos o más líneas.
- b) Renta mensual: \$400
- c) Conexión a Internet: \$199 mensuales
- d) Costo por llamada: \$1.55

Intensivo:

- a) Costo de instalación: \$1 000 por una línea o \$150 por cada línea contratada, si se contratan dos o más.
- b) Renta mensual: \$550
- c) Costo por llamada: \$0.45
- d) Conexión a Internet: sin costo



1. Plantea mediante una expresión algebraica las condiciones de cada paquete y verifica que la expresión matemática obtenida sea la correcta.
2. ¿Puedes decir en cuál de los paquetes el costo por llamada es más barato? Justifica tu respuesta.
3. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de cada paquete?

Consideraciones previas: el profesor habrá de alentar en todo momento a los alumnos a que se dé una discusión colectiva dentro de cada equipo abordando al principio el problema de manera intuitiva. El profesor debe asegurarse de que en cada grupo se haya hecho una selección correcta de los datos.

Observaciones posteriores:

Plan de clase (2/3)

Escuela: _____

Fecha: _____

Profr(a): _____

Curso: Matemáticas 3 Apartado. 1.6 Eje temático: Manejo de la información

Conocimientos y habilidades: modificar la expresión algebraica obtenida para que represente la nueva situación.

Intenciones didácticas: elaborar la gráfica de cada situación.

Consigna: el maestro quizá considere que para el primer punto de esta sesión sea mejor que sus alumnos lo trabajen de manera individual, ya que de ese modo se ven forzados a poner a prueba la comprensión del tema que cada uno tiene. Para la segunda pregunta, tal vez sea necesario, por consideraciones de tiempo, que en la clase se trabaje la construcción de sólo una gráfica. El tercer punto tiene que trabajarse de forma individual, pues lo importante aquí es que los alumnos desarrollen sus habilidades comunicativas.

Básico:

a) Larga distancia nacional: \$3.30 por minuto

Intermedio:

a) Larga distancia nacional: \$2.80 por minuto

Intensivo:

a) Larga distancia nacional: 1.30 por minuto

1. ¿Cómo modifica lo anterior cada una de las expresiones algebraicas que obtuviste antes?

2. Con toda la información que has recabado elabora una tabla para cada paquete y construye su gráfica correspondiente. Utiliza un



mismo plano cartesiano para las tres gráficas diferenciando cada una con un color distinto.

3. Describe el procedimiento que utilizaste para hacer cada una de las gráficas.

Consideraciones previas: conviene que estas preguntas se trabajen bajo la modalidad de discusión grupal, pues de esa forma la clase estaría participando activamente al desarrollar sus habilidades de argumentación, ya que el profesor exhortará que cada respuesta deba argumentarse.

Observaciones posteriores:

Plan de clase (3/3)

Escuela: _____

Fecha: _____

Profr(a): _____

Curso: Matemáticas 3 Apartado. 1.6 Eje temático: Manejo de la información

Conocimientos y habilidades: que los alumnos sean capaces de percibirse de las consecuencias de modificar los valores de ambos ejes.

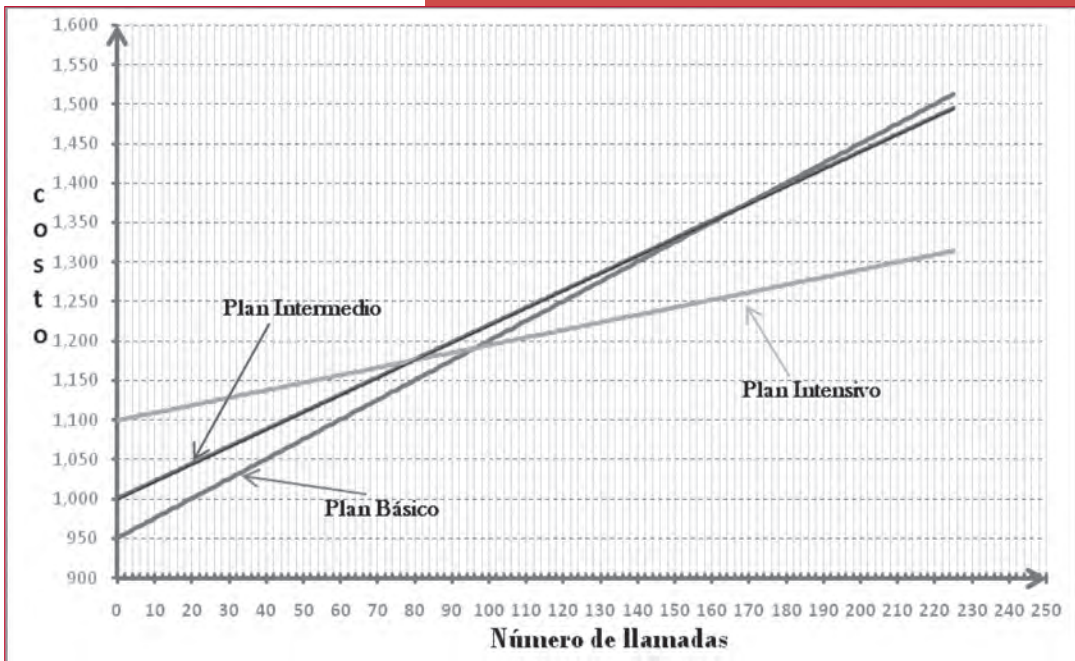
Intenciones didácticas: relacionar las modificaciones de los valores de la ecuación con los cambios en las pendientes de las rectas respectivas.

Consigna: se sugiere que toda esta sesión se trabaje en equipos, para lo cual deben dedicarse al menos treinta minutos para la discusión y el análisis de cada pregunta al interior de cada equipo. El tiempo restante (veinte minutos) se podría aprovechar para la discusión grupal.

De acuerdo con la siguiente gráfica, contesta las preguntas.

- a) ¿A partir de qué número de llamadas el paquete Básico es más caro que el Intermedio?
- b) ¿Cuánto cuesta cada llamada en el paquete Intermedio?
- c) ¿Cuál es el costo por llamada de cada uno?
- d) ¿Por qué no se intersecan las tres rectas en un punto?





Consideraciones previas: esta es una oportunidad para utilizar al máximo las TIC; en particular la utilización intensiva de la hoja de cálculo electrónica y de su función para gráfica. En caso de que no se cuente con estos recursos, la sesión puede efectuarse, sin el menor menoscabo, usando los recursos tradicionales del salón de clase.

Observaciones posteriores:





**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL CONTENIDO
CAMBIO Y RELACIONES**
Eduardo Mancera Martínez

I. PISA como una oportunidad de acción docente

Aunque las evaluaciones internacionales suelen sacudir los sistemas educativos, pues las base de datos ofrecen –especialmente a los países asociados a los resultados bajos– evidencias de posibles áreas de atención, es en este sentido que conviene interpretar dichas evaluaciones bajo la perspectiva de una retroalimentación.

Las reacciones a las bajas puntuaciones son múltiples, pero no puede negarse la importancia inherente a los estudios comparativos. En particular, los resultados obtenidos por nuestro país en el Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes, conocido por las siglas PISA, han provocado explicaciones, críticas y otras reacciones, pero pocos han considerado que en este programa hay un área de oportunidad para mejorar el estado actual de la enseñanza de asignaturas como las Matemáticas.

Algunos piensan que los contenidos y procedimientos implicados en PISA no tienen relación con nuestros planes y programas de estudio. Sin embargo, hay importantes puntos de convergencia entre los planteamientos de planes y programas de estudio de la asignatura de Matemáticas⁶ y los principios establecidos en PISA para evaluarla⁷. La siguiente tabla indica algunos:

⁶Subsecretaría de Educación Básica (2006). *Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de estudio 2006*. México: Dirección General de Desarrollo Curricular de la Secretaría de Educación Pública.

⁷OCDE (2006). *PISA 2006, Marco de la evaluación, conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. México: Santillana.



Programa de Matemáticas	PISA
<p>“... adquirir y desarrollar los conocimientos, las habilidades, los valores y las competencias básicas para seguir aprendiendo a lo largo de su vida; enfrentar los retos que impone una sociedad en permanente cambio, y desempeñarse de manera activa y responsable como miembros de su comunidad y ciudadanos de México y del mundo.” (p. 5)</p>	<p>“... esa amplia gama de conocimientos y habilidades en las áreas de las competencias ... matemática (...) que les permitirá desenvolverse en la vida adulta (...). conocimientos a la vida adulta depende de manera fundamental de la adquisición de una serie de conceptos y habilidades de carácter más amplio” (p. 10)</p>
<p>“... desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, planear y resolver problemas ...” (p. 7)</p> <p>“... los alumnos formulen y validen conjeturas, se planteen preguntas, utilicen procedimientos propios y adquieran las herramientas y los conocimientos matemáticos socialmente establecidos, a la vez que comunican, analizan e interpretan ideas y procedimientos de resolución...” (p. 7)</p> <p>“... despertar y desarrollar en los alumnos la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, la creatividad para formular conjeturas, la flexibilidad para modificar su propio punto de vista y la autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones desconocidas...” (p. 7)</p>	<p>“... Finalmente, en el ámbito de las matemáticas, ser capaz de razonar cuantitativamente y de representar relaciones o dependencias tiene mayor valor a la hora de aplicar las habilidades matemáticas a la vida cotidiana que la capacidad de responder a las preguntas que suelen figurar en los libros de texto ...” (p. 10)</p> <p>“Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos”... (p. 74)</p>
<p>“... Cabe señalar que los conocimientos y habilidades en cada bloque se han organizado de tal manera que los alumnos vayan teniendo acceso gradualmente a contenidos cada vez más complejos y a la vez puedan establecer conexiones entre lo que ya saben y lo que están por aprender” ... (p. 8)</p>	<p>“... Existen asimismo una serie de habilidades generales de carácter muy amplio que es esencial que los alumnos desarrollen. Entre ellas se incluyen la comunicación, la adaptabilidad, la flexibilidad, la capacidad de solucionar problemas y la utilización de las tecnologías de la información. Estas habilidades se desarrollan en diversas áreas curriculares y, por tanto, han de ser evaluadas con un enfoque transversal amplio. (p. 10)</p>



“... competencias matemáticas (...)

Planteamiento y resolución de problemas. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones...

Argumentación. Cuando el profesor logra que sus alumnos asuman la responsabilidad de buscar al menos una manera de resolver cada problema que plantea, junto con ello crea las condiciones para que dichos alumnos vean la necesidad de formular argumentos que les den sustento al procedimiento y/o solución encontrados ...

Comunicación. Comprende la posibilidad de expresar y representar información matemática contenida en una situación o del fenómeno, así como la de interpretarla. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; que se establezcan relaciones entre estas representaciones ...

Manejo de técnicas. Esta competencia se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos, con el apoyo de tecnología o sin él... (pp. 17-19)

“... recurrir a (...) capacidades matemáticas características ...

Pensamiento y razonamiento. Consiste en plantear preguntas características de las matemáticas («¿Hay...?», «En tal caso, ¿cuántos...?», «¿Cómo puedo hallar...?»); conocer los tipos de respuesta que las matemáticas ofrecen a esas preguntas ...

Argumentación. Comporta entender en qué consisten las pruebas matemáticas y qué las diferencia de otro tipo de razonamientos matemáticos; seguir y evaluar cadenas de argumentaciones matemáticas de distintos tipos ...

Comunicación. Consiste en la capacidad de expresarse de muy diversas maneras sobre temas de contenido matemático, tanto de forma oral como escrita ...

Construcción de modelos. Comporta estructurar el campo o la situación para la que se ha de elaborar un modelo; traducir la realidad a estructuras matemáticas; interpretar modelos matemáticos ... (p. 101)

Una revisión acuciosa de los documentos antes considerados, permitirá encontrar más vínculos, basta lo anterior como una muestra.

Se ha afirmado que PISA es un área de oportunidad para el maestro de Matemáticas ¿Por qué? Una revisión de los procedimientos y elaboraciones conceptuales contenidos en PISA y sus reportes indican una posibilidad de enseñanza implícita, que no se contrapone con las tareas cotidianas de los maestros, en el marco de la Reforma de la Educación Secundaria (RES) reciente.

En los procedimientos de PISA se parte de una situación problemática y de ahí se desprenden variantes para definir los elementos para precisar la instrumentación que permita explorar varias competencias, lo cual es un principio básico en la definición de temas y subtemas de la RES, pues algunos contenidos se han desglosado en varios niveles de tratamiento para dosificarse a través de los tres grados de educación secundaria, como es el caso de la proporcionalidad.

En el programa se expresa una idea de avance en *espiral*:

... que los alumnos utilicen sus conocimientos previos, con la posibilidad de que éstos evolucionen poco a poco ante la necesidad de resolver problemas cada vez más complejos. Necesariamente, al iniciarse en el estudio de un tema o de un nuevo tipo de problemas, los alumnos usan procedimientos informales y a partir de ese punto es tarea del maestro que dichos procedimientos se sustituyan por otros cada vez más eficaces (SEP, 2006: 19).

Esto permite incorporar algunas ideas del marco de PISA en la planeación docente:



El problema se va abstrayendo progresivamente de la realidad mediante una serie de procesos, como la elaboración de supuestos, la generalización y la formalización, mediante los cuales se destacan los rasgos matemáticos de la situación y se transforma el problema del mundo real en un problema matemático que reproduce de manera fiel la situación (OCDE, 2006: 100).

El principio de *espiralidad* subyacente y la RES da un espacio importante para que el maestro, a partir de su práctica cotidiana, pueda ayudar a los estudiantes al desarrollo de algunas competencias matemáticas, para ello es importante revisar los contenidos establecidos en PISA y los niveles considerados. Por ejemplo, desprender varias actividades y modificaciones de la situación original conduce a una forma especial de manejar el contenido matemático escolar.

II. Planteamiento de la situación problemática

Se puede elegir un contenido de PISA, por ejemplo: *Cambio y Relaciones*, el cual se considera como:

Todo fenómeno natural es una manifestación del cambio, y el mundo que nos rodea presenta una multiplicidad de relaciones temporales o permanentes entre sus diversos fenómenos. Ejemplos de ello son los cambios que experimentan los organismos al crecer, el ciclo de las estaciones, el flujo y reflujo de las mareas, los ciclos del desempleo, los cambios de tiempo y los índices de la bolsa.

Algunos de estos procesos de cambio llevan implícita una serie de funciones matemáticas sencillas que pueden utilizarse para describirlos o modelarlos: funciones lineares, exponenciales, periódicas o logísticas, tanto discretas como continuas (OCDE, 2006: 89).

Implica capacidad de representar cambios de diversas maneras dado que los procesos de cambio pueden expresarse a través de relaciones aritméticas (tablas), con expresiones algebraicas y a partir de gráficas. Cada una de estas formas de representación contienen elementos importantes para su interpretación y aplicación en diferentes situaciones.

Es de particular importancia el paso o traducción de los elementos de una de las representaciones a otra.

Este contenido se aborda en varios grados y ejes planteados en el Programa de Matemáticas, por ejemplo:

En el *Eje: Sentido Numérico y pensamiento algebraico*, el tema: *Significado y uso de las literales* dedica el subtema a: *Relación funcional*

En este espacio curricular se plantean situaciones relacionadas con diversos aspectos de las funciones. En cada grado se aborda este tópico incrementando gradualmente la dificultad, lo cual permite establecer una relación importante entre el desarrollo de este contenido y los niveles establecidos por PISA:



Habilidades y conocimientos programáticos por: Grado-Bloque-Tema-Subtema	Nivel de PISA asociado al contenido Cambio y relaciones
<p>Primer grado Bloque 4 4.3. Analizar en situaciones problemáticas la presencia de cantidades relacionadas y representar esta relación mediante una tabla y una expresión algebraica. En particular la expresión de la relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación. (p. 52)</p>	<p>Nivel 1: Localizar información relevante en una tabla o gráfica, sencilla; seguir instrucciones directas y simples, al leer información de una tabla o gráfica en una forma familiar o estándar; realizar cálculos simples que impliquen relaciones entre dos variables familiares.</p>
<p>Primer grado Bloque 5 5.2. Analizar los vínculos que existen entre varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a la misma situación, e identificar las que son de proporcionalidad directa. (p. 58)</p>	<p>Nivel 2 Trabajar con algoritmos, fórmulas y procedimientos simples en la solución de problemas; asociar texto a una representación sencilla (gráfica, tabla, fórmula); usar habilidades básicas de interpretación y razonamiento.</p>
<p>Segundo grado Bloque 3 3.3. Reconocer en situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar esta relación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$. (p. 86)</p>	<p>Nivel 3 Resolver problemas que impliquen trabajar con representaciones múltiples (textos, gráficas, tablas, fórmulas) que incluyan cierta interpretación y razonamiento en contextos familiares, así como la comunicación de argumentaciones.</p> <p>Nivel 4 Entender y trabajar con representaciones múltiples, incluyendo modelos matemáticos explícitos de situaciones del mundo real para resolver problemas prácticos. Tener flexibilidad en la interpretación y razonamiento en contextos no familiares; y comunicar las explicaciones y argumentaciones resultantes.</p>
<p>Tercer grado Bloque 3 3.1. Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica. (p. 123)</p>	<p>Nivel 5 Resolver problemas, usando el álgebra avanzada, modelos y expresiones matemáticas formales. Asociar representaciones matemáticas formales a situaciones complejas del mundo real. Usar habilidades de solución de problemas complejos y de multinivel. Reflexionar y comunicar razonamientos y argumentaciones.</p> <p>Nivel 6 Usar comprensión significativa y habilidades de razonamiento y argumentación abstractas. Tener conocimiento técnico y de convenciones para solucionar problemas y generalizar soluciones matemáticas a problemas complejos del mundo real.</p>

Cabe mencionar que el concepto de función tiene una presencia importante en toda la matemática, al grado que varios afirman que en Matemáticas *todo es función*, de tal modo que esta noción puede detectarse en otros ejes, temas o subtemas, sin embargo, en apego al marco para la distribución de contenidos y denominación de ellos, en el programa de Matemáticas, se enfoca la atención solamente a lo que se ha considerado en la tabla anterior.



III. Secuencias didácticas

Lo que a continuación se desarrolla, tiene como finalidad proporcionar al maestro de Matemáticas, que atiende cualquiera de los grados de educación secundaria, una serie de ideas para acercar su trabajo cotidiano tanto a los planteamientos de planes y programas de estudio como a las consideraciones planteadas en PISA.

Se presentan tres secuencias didácticas, cada secuencia se presenta con la misma estructura:

- Una *tabla* que recuerda las correspondencias entre un contenido programático, relacionado con el contenido elegido de PISA, y algunos niveles de PISA.
- El *objetivo* definido para la secuencia.
- Una descripción breve de los *conceptos* y *procedimientos* implicados.
- Una relación de los *aprendizajes esperados*
- Una *situación problemática*, similar para las tres secuencias, a fin de mostrar cómo se puede respetar la idea de avance espiral de los planes y programas de estudio.
- Se incluyen algunos *comentarios* sobre el papel del maestro y de los estudiantes, los cuales se disminuyen en las secuencias dos y tres para evitar la repetición.
- Las *consignas* que puede considerar el maestro a lo largo de la secuencia se presentan en un recuadro gris.
- Al final se hacen sugerencias para realizar evaluaciones formativas, incluyendo tipos de actividades no típicas que acercan a los estudiantes a los requerimientos de planes y programas de estudio y de los propósitos educativos planteadas en PISA.

Primera secuencia didáctica

Niveles 1 y 2 de PISA y Primer Grado de Educación Secundaria

El principio del tratamiento del contenido en clase y de la elaboración de actividades es la identificación de una *situación problemática*. Al respecto, se puede partir de una situación sencilla como el desplazamiento de personas.

De acuerdo con la tabla anterior en el primer grado se pueden abordar situaciones asociadas a los niveles 1 y 2:



Programa de Matemáticas	PISA
Analizar en situaciones problemáticas la presencia de cantidades relacionadas y representar esta relación mediante una tabla y una expresión algebraica. En particular la expresión de la relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación. (p. 52)	Localizar información relevante en una tabla o gráfica, sencilla; seguir instrucciones directas y simples, al leer información de una tabla o gráfica en una forma familiar o estándar; realizar cálculos simples que impliquen relaciones entre dos variables familiares.
Analizar los vínculos que existen entre varias representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas), que corresponden a la misma situación, e identificar las que son de proporcionalidad directa. (p. 58)	Trabajar con algoritmos, fórmulas y procedimientos simples en la solución de problemas; asociar texto a una representación sencilla (gráfica, tabla, fórmula); usar habilidades básicas de interpretación y razonamiento.

En este sentido, considerando la situación de los desplazamientos de personas, se deberán determinar tipos de cantidades a considerar, por ejemplo: tiempo empleado, número de pasos, longitudes recorridas, entre otras posibilidades.

Teniendo en cuenta dichas cantidades implicadas en la situación que se utilizará, se determinará si entre ellas existe una relación de proporcionalidad directa y en su caso, se representará ésta resaltando las relaciones numéricas, comprobadas en varios casos, por medio de una tabla; también se podrá establecer una relación global entre las variables implicadas a partir de una expresión algebraica e incluso se podrá visualizar las relaciones entre las cantidades a partir de una figura o gráfico.

A partir de las representaciones construidas se identificarán elementos que permiten encontrar información relevante y al hacerlo se deberán realizar cálculos sencillos. Así, lo que a continuación se desarrollará puede referirse a un *objetivo*, que puede reflejarse en un plan de clase, el cual puede redactarse como sigue:

Objetivo

Utilizar el desplazamiento de personas para recolectar datos que permitan analizar correspondencias entre cantidades a fin de determinar si se relacionan como una proporcionalidad directa y expresar dicha relación mediante representaciones numéricas (tablas), figurativas (gráficas) y literales (algebraicas).

En este objetivo se vinculan los conocimientos y habilidades programáticos considerados en el programa y el nivel respectivo de PISA.

En la actividad que se diseñe se deberán tener en cuenta los conocimientos implicados, ya sea *conceptos o procedimientos*, en forma sintética se puede establecer que las nociones y medios asociados son:



Conceptos y procedimientos

El concepto de proporcionalidad directa y procedimientos de cálculo aritmético para determinar fracciones equivalentes o el valor faltante en una igualdad de razones; además del uso del plano cartesiano para construir gráficas correspondientes con relaciones funcionales lineales.

Al realizar las actividades que se plantearán se espera que los alumnos adquieran ciertos *aprendizajes*, término con el que se denomina genéricamente a los *significados* o *estructuras mentales* construidas en el proceso.

Cabe mencionar que el principio de *avance en espiral* del programa de Matemáticas indica un *proceso de construcción* más que una *apropiación* de nociones de manera perfecta y acabada.

Bajo las consideraciones anteriores podemos decir que los *aprendizajes esperados* son:

Aprendizajes esperados

Los estudiantes podrán identificar condiciones bajo las cuales es posible determinar si dos cantidades se relacionan por medio de una proporción directa y esto lo puedan argumentar utilizando representaciones como tablas, gráficas o expresiones algebraicas.

La duración de las clases es variable, lo realizado por un maestro en cierto tiempo se realiza, por otro maestro, en otro tiempo, de tal modo que los *tiempos considerados* a continuación deben ser una referencia general, una estimación, en última instancia se puede adaptar a los criterios de toma de decisiones que se realizan cotidianamente en el salón de clases.

Puede asumirse el tiempo planteado o planear realizar solamente una parte de las actividades sugeridas y dejar al estudiante como *tarea* lo que resta. Las preferencias docentes y las experiencias que se tienen pueden ayudar a administrar de mejor manera el tiempo.

Una clase puede corresponder a cada uno de los *acercamientos* del tema que en seguida se presentan; las consignas o instrucciones que el docente puede plantear a los estudiantes, se presentan en un recuadro de fondo gris.

Primer acercamiento

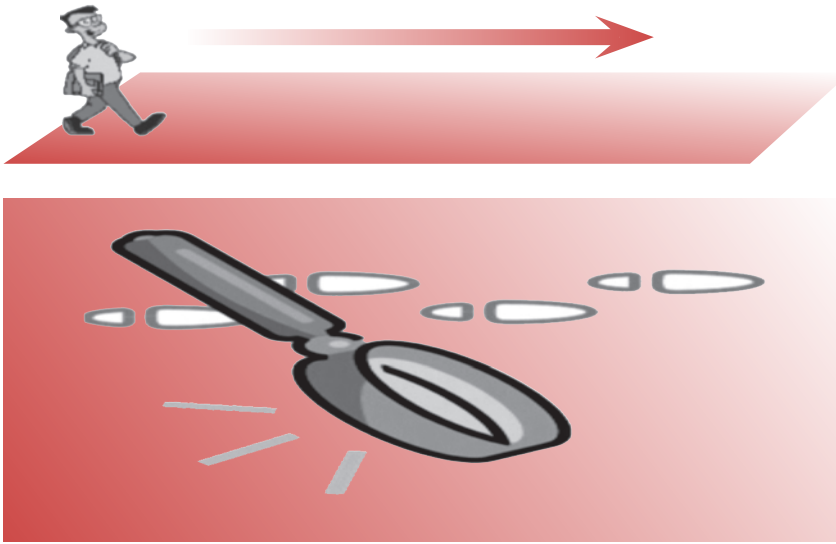
Los pasos de López...

Organizados en equipos, de cinco integrantes cada uno, midan la longitud de los pasos de dos de sus compañeros del equipo, además del tiempo que ocupan en realizar cierto número de pasos o un avance determinado de una distancia.

Comparen los resultados obtenidos con los de otro equipo.

Tiempo (20 minutos)





Los *recursos* requeridos en esta actividad deben ser sencillos pero es importante tenerlos a mano con anticipación, tanto algunos elementos para las mediciones como para el registro de datos y el procesamiento de éstos.

Recursos

Una superficie arenosa, papel periódico u otro medio en el que se puedan marcar huellas para facilitar las mediciones requeridas; marcadores, calculadoras básicas y cintas métricas. Para facilitar la experiencia el maestro puede utilizar calculadoras o emplear hojas electrónicas para calculadoras o para computadoras de escritorio.

Los cálculos aritméticos que serán necesarios pueden distraer a los estudiantes, *si se elaboran con papel y lápiz*, por ello es conveniente utilizar calculadoras u hojas electrónicas.

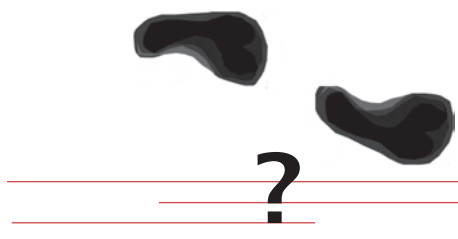
En esta experiencia será más relevante que el estudiante analice las relaciones numéricas que se pueden detectar al hacer cálculos aritméticos que realizarlos directamente a mano. No se intenta demeritar la importancia de las operaciones básicas, solamente conviene señalar que se facilita usando otros recursos para efectuar las partes rutinarias. En particular el uso de memorias en la calculadora o la transcripción de *fórmulas* en la hoja electrónica serán más relevantes.





	B	C	D
1			
2			
3			
4	T	$V=2+2t$	$V=5$
5		0	2
6		0,5	3
7		1	4
8		1,5	5
9		2	6
10		2,5	7
11		3	8
12		3,5	9
13		4	10
14		4,5	11
15		5	12

Los estudiantes deben realizar las mediciones previo acuerdo sobre cómo hacerlo, pues hay varias posibilidades y algunas de ellas no son adecuadas, es necesario que se esté atento a la forma en que deciden medir las longitudes de los pasos.



Después de haber realizado mediciones de uno o varios pasos, se plantean preguntas:

*¿Cómo fueron las mediciones del grupo X? ¿Cómo las realizaron?
¿A qué resultados llegaron? ¿Qué fue lo que obtuvo el grupo Y? etcétera.*

Tiempo (15 minutos)

Es importante permitir la expresión de varias respuestas, para tener claro la causa posible de las diferencias entre los grupos. En esta parte solamente se intenta conocer la amplia variedad de valores de mediciones que se pueden obtener, de tal modo que las distancias y el número de pasos no necesariamente corresponderán exactamente de grupo a grupo, aunque habrá aproximaciones entre ellas.

Como los estudiantes solamente podrán medir un número *pequeño* de pasos, al principio es importante plantearles preguntas que les permitan responder con las mediciones directas. Pero también conviene plantearles otros cuestionamientos que los obliguen a utilizar la información de las mediciones directas y encontrar procedimientos de cálculo aritmético que les permitan contestar:

*¿Cuántos pasos dieron por segundo? ¿Cuántos a los 2 segundos?
¿Cuántos a los 3 segundos? etcétera.
¿Qué distancia se recorre cada 20 segundos? ¿25 segundos? ¿30 segundos? etcétera.*



Tiempo (20 minutos)

Se recomienda que se utilicen en este momento solamente *números pequeños y sencillos de manejar*, para centrar la atención de los estudiantes en el proceso. También es importante reiterar que se pueden utilizar formas para el registro y procesamiento de datos, las circunstancias particulares delimitarán este aspecto.



Segundo acercamiento

Se elaborarán tablas en las que a partir del tiempo se determine el número de pasos y la distancia recorrida. Los datos deberán referirse a las respuestas ofrecidas en las preguntas antes planteadas. Se discutirán los resultados obtenidos. Es importante prestar atención sobre la forma de llenar las celdas correspondientes.

Vamos a revisar algunas de las tablas que elaboraron y veamos como realizaron los cálculos.

Tiempo (10 minutos)

Cabe mencionar que los estudiantes pueden haber realizado las tablas de diversas maneras, lo cual debe considerarse correcto si se relacionan adecuadamente las cantidades correspondientes. Por ejemplo, algunos pueden haber realizado una tabla como:

Tiempo en segundos	Número de pasos	Distancia recorrida en cm
1	1.5	61
2	3	122
3	4.5	183
4	6	244
5	7.5	305



Otros podrían haber preferido:

Número de pasos	Tiempo en segundos	Distancia recorrida en cm
1.5	1	61
3	5	122
4.5	10	183
6	15	244
7.5	30	305

También es posible que algunos hayan utilizado *tablas horizontales*:

Tiempo	1	2	3	4	5
Número de pasos	1.5	3	4.5	6	7.5
Distancia recorrida	61	122	183	244	305

Por lo general se referirán a la cantidad de pasos con cantidades enteras, pero pueden trabajar también cantidades con decimales, esto no es relevante y puede aceptarse que lo hagan si no distrae la atención.

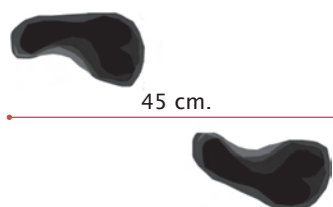
Si se considera necesario se puede realizar una discusión sobre la mejor forma de ubicar las columnas, pues todos deben tener claro como se lee la información en las tablas.

Los estudiantes ofrecerán respuestas de acuerdo con los datos recabados, pero es importante llegar a un consenso del tipo de mediciones que todos pueden aceptar como *satisfactorias* para que todo el grupo pueda manejar los mismos datos. Es decir, se llega a un acuerdo sobre la cantidad de pasos que todos pueden aceptar como válidos y la longitud de cada paso.

Lo anterior permite avanzar en otros análisis. Solamente para ejemplificar:

Parece que podemos aceptar que, en promedio, cada segundo se da un paso de 45 cm de largo...

Tiempo (5 minutos)



El trabajo colegiado es mejor

Trabajar en este tema con profesores de otras asignaturas como los relacionados con las materias de Ciencias puede ser de mucha utilidad.

Con los datos acordados se puede elaborar nuevamente una tabla que podrá compartir todo el grupo:

Elaboren tablas con los datos acordados

¿Cuántos pasos se dan cada segundo? ¿Qué distancias corresponden al avance por segundo?

Tiempo (20 Minutos)

La tabla puede quedar de la siguiente forma:

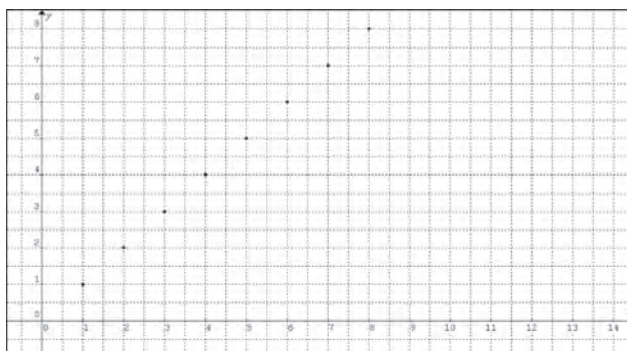
Tiempo en segundos	Número de pasos	Distancia recorrida en cm
1	1	45
2	2	90
3	3	135
4	4	180
5	5	225
6	6	270
7	7	315

Estos datos pueden graficarse y, en su caso, discutir la forma de elaborar la gráfica de acuerdo a lo que realicen los estudiantes, debido a que este tipo de gráficas ya las han realizado con anterioridad.

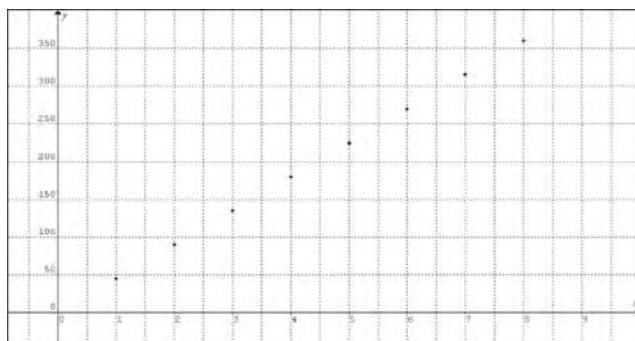
Grafiquen los valores obtenidos y comparen sus gráficas.

Tiempo (10 minutos)

La gráfica correspondiente al número de pasos por unidad de tiempo puede ser del tipo:



Por otro lado, la gráfica correspondiente a la distancia recorrida por unidad de tiempo puede ser de la siguiente forma:



En ambos casos es importante realizar una discusión sobre la designación de los ejes a cada tipo de cantidades implicadas. Incluso, por curiosidad, algunos pueden pensar en hacer una gráfica en la que relacionen el número de pasos y las distancias recorridas, es importante permitir que lo hagan pero en las discusiones posteriores se utilizará solamente el tiempo como variable independiente.

Será útil plantear constantemente preguntas sobre la ubicación de los puntos en las gráficas y las diferencias entre ellas, pues en ambas los puntos parecen *alineados*.

¿Por qué este punto no se puede colocar más a la derecha (o izquierda o arriba o abajo)?

¿Con este punto se puede saber el número de pasos o las distancias recorridas? ¿En cuánto tiempo?

¿Qué hubiera sucedido si se cambia la escala de tal eje? ¿Cambiará la "forma" de la gráfica?

¿En cualquier caso la gráfica siempre corresponderá a puntos "alineados"? ¿Por qué?

Tiempo (5 minutos)

Tercer acercamiento

Se continuará provocando que los estudiantes descubran un patrón general que puedan plantear de manera algebraica.



Ahora incorporemos más datos a las tablas: ¿Qué distancia se recorre cada 30 minutos? ¿Cada 45 minutos? ¿Cada hora y cuarto? ¿Cada dos horas? ¿Cada cinco horas? etcétera.

En una maratón, caminando, ¿Cuánto tiempo se emplearía?

En una película (Forrest Gump, novela escrita en 1985 por Winston Groom y adaptada al cine en 1994) se dice que el personaje central corrió por días, semanas, meses e incluso años, si hubiera realizado lo mismo caminando ¿cuántos pasos habría dado? ¿Qué distancias hubiera recorrido?

Tiempo (20 minutos)

En estos casos las mediciones directas son improcedentes, incluso con valores de tiempo más pequeños los estudiantes se habrán dado cuenta de ello y se acercaron a encontrar un patrón para realizar los cálculos, el cual será más necesario ahora.

Tiempo en segundos	Número de pasos	Distancia recorrida en cm
1	1	45
5	5	225
10	10	450
15	15	675
30	30	1350
75	75	3375
120	120	5400
180	180	8100
240	240	10800
300	300	13500
360	360	16200
720	720	32400
1200	1200	54000

Cuando se incluyen valores de tiempos *grandes* los alumnos, buscando simplicidad, encontrarán *formas cortas* para encontrar la respuesta, sin pensar en mediciones directas.

Los estudiantes se darán cuenta de la relación entre las cantidades de la tabla y las operaciones aritméticas necesarias para encontrar una de ellas a partir de otra.

Es el momento de solicitar que se expliciten los cálculos aritméticos que se realicen.

Escriban la forma en que realizaron sus cálculos

Tiempo (10 minutos)

Los estudiantes pueden recurrir a expresiones como:

- *multiplicamos el tiempo por el número de pasos y el número de pasos por la longitud de ellos*
- *multiplicamos el tiempo por 45 que es la longitud de cada paso, para obtener la distancia que se avanza en ese tiempo*



- *multiplicamos cinco por uno para saber el número de pasos en cinco segundos y luego el resultado por 45, con lo cual obtenemos la distancia que se avanza.*

Pero es frecuente que los estudiantes, en ánimo de reducir lo que escriben, como lo hacen ahora con la comunicación vía teléfonos celulares, busquen abreviar las palabras y eso ayuda a incorporar literales para representar las cantidades involucradas.

- *si t es el tiempo, p el número de pasos y l la longitud de los pasos, se debe tener que:...*

Ellos deben establecer las expresiones algebraicas que consideren pertinentes, pero se debe pedir que comprueben que dicha expresión realmente sirve para representar los cálculos necesarios.

El tipo de letras por emplear es irrelevante, pero si se debe identificar el papel que juegan en la interpretación y al realizar los cálculos, se debe resaltar esta parte.

¿Se pueden usar otras literales?

¿Cambia la relación entre cantidades con otras letras?

¿Con la misma expresión pueden utilizarse diferentes unidades de tiempo o de longitud?

Tiempo (5 minutos)

Es importante analizar las gráficas correspondientes y analizar si las escalas se deben modificar, pero sobre todo si la información de las gráficas anteriores está contenida en las nuevas gráficas.

Con los nuevos datos hay que elaborar una gráfica y revisar cómo se presenta en ellas la información que ya teníamos.

¿Se parecen las gráficas?

Si hay diferencias ¿Cómo se explican tales diferencias?

Tiempo (15 minutos)

Cuarto acercamiento

Se han dedicado tres etapas a lo anterior por los requerimientos de tiempo para hacer cálculos, elaborar tablas y gráficas de distintos tipos. La experiencia no puede darse por concluida, es el momento de iniciar un trabajo matemático más relevante que seguir con actividades rutinarias que ocupen mucho tiempo. Es importante, tanto desde la perspectiva del programa de Matemáticas y de PISA, que se dedique tiempo a que los estudiantes generalicen el conocimiento y los procedimientos que se trabajaron en las etapas anteriores. También será importante que jueguen con datos, soluciones y contextos, utilizando los esquemas anteriores.



Se puede iniciar esta etapa pidiéndoles que identifiquen otras situaciones, referidas a otros contextos, pero que se aborden con la misma herramienta matemática.

Trabajando en equipos como se hizo anteriormente, planteen problemas en los que se trabajen relaciones similares, como las que se trabajaron pero que se refieran a otros contextos.

Tiempo (10 minutos)

Así puede llegarse a situaciones como:

- Una llave que llena botellas en una fábrica llena tres botellas por minuto ¿Cuántas botellas podrá llenar en 5, 15, 30 y 45 minutos?
- Una secretaria escribe cuatro cuartillas en 25 minutos ¿cuántas cuartillas podrá escribir en...?

También se puede pedir que definan datos necesarios para encontrar una solución dada.

*¿Qué cantidad de tiempo se requiere para llenar 55 botellas?
¿Qué cantidad de cuartillas por unidad de tiempo se requerirá para que la secretaria escriba 35 en una hora?*

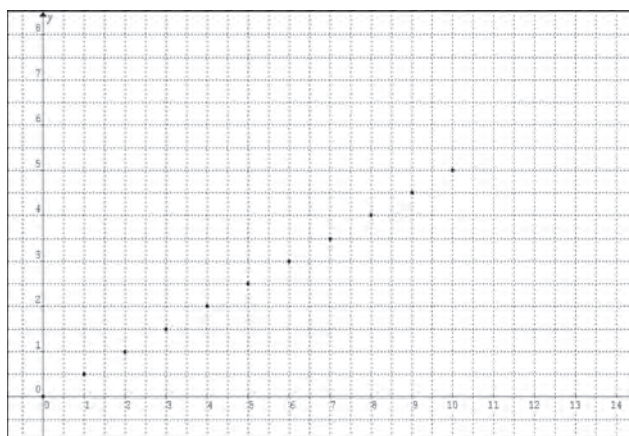
Tiempo (20 minutos)

Es momento de incluir gráficas pero en otro sentido, no elaborar una gráfica a partir de datos conocidos, si no de manera inversa, a partir de una gráfica elaborar un conjunto de datos que corresponda con ella y encontrar la expresión algebraica asociada.

Elaboren una tabla que corresponda con los datos presentados en la siguiente gráfica y encuentren las expresiones algebraicas correspondientes.

Tiempo (20 minutos)





Evaluación formativa

La evaluación se desprenderá del trabajo realizado como un instrumento de retroalimentación para que los estudiantes aborden situaciones similares a las ya elaboradas, con esto se intentará que los alumnos aborden situaciones que se parezcan a las ya familiares pero que requieran ampliar el espacio en el que deben poner en juego sus habilidades y extender el espacio para poner en juego sus competencias. A fin de cuentas la evaluación es otra oportunidad de aprender.

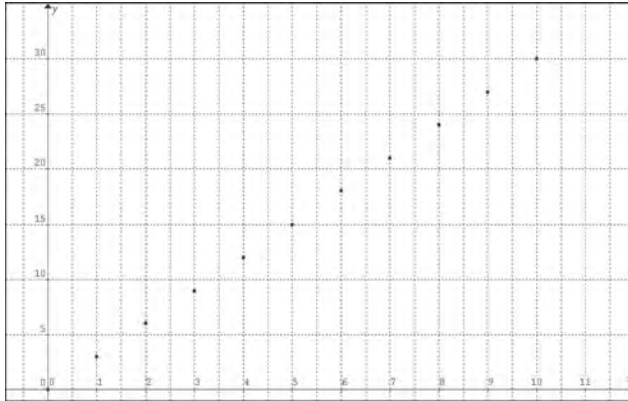
Por ejemplo, *rellenar espacios vacíos de una tabla*, es algo que puede ser rutinario, pero si se pide realizar *rellenando partes de las dos columnas*, es una situación diferente:

	5
	10
6	15
8	
	30
14	
16	
20	
	55
	60

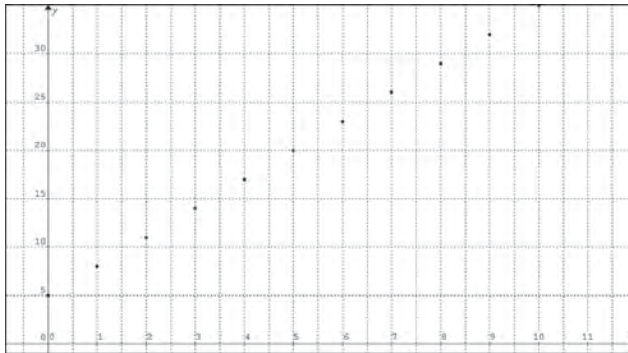
Si además se pide *encontrar la expresión algebraica asociada* con los cálculos realizados, entonces el trabajo con la tabla es más completo.

Es importante que trabajen las gráficas correspondientes con una tabla completa de datos, o que se construyan tablas de datos a partir de la información contenida en una tabla, pero para ampliar el trabajo en esta área se pueden incorporar actividades que requieran interpretación de situaciones que son representadas por *gráficas que no inicien en el origen de coordenadas*. Por ejemplo que inicien en un número del eje Y:





O que el inicio sea un punto en el eje X:



Es importante plantear preguntas adicionales para encauzar el análisis de las gráficas y poner en juego procedimientos y conocimiento trabajados pero en contextos no familiares.

- *¿Es una relación de proporcionalidad directa?*
- *Para que una gráfica represente una relación de proporcionalidad directa ¿Cómo debe ser la gráfica?*
- *¿Qué indicaría la gráfica si no “creciera”?*
- *¿Se puede estimar valores que no estén en la tabla a partir de las gráficas obtenidas?*
- *¿Cómo serían las gráficas de una persona mayor de edad que no puede caminar muy rápido?*
- *¿Cómo sería la gráfica de un corredor de pista veloz?*

La evaluación es un proceso por el cual se intenta tener información sobre las experiencias realizadas en clase. Sin embargo, es importante reiterar que si se incluyen solamente repeticiones de lo que se trabajó, se tendrá una imagen de lo que los alumnos alcanzan a repetir o almacenar en su memoria, los procesos de solución buscarán respuesta a las preguntas:

- *¿Cómo lo hice? ¿De qué manera se abordó este tema?*



Si bien es cierto, ese tipo de situaciones son necesarias, el buen manejo de la memoria nunca es despreciable, pero se debe de cuidar que este aspecto no sea el único que se trabaje en las evaluaciones, de acuerdo al enfoque de la asignatura de Matemáticas de educación secundaria y los principios que rigen a PISA, se educa para resolver problemas, para desarrollar las facultades personales, de tal manera que eso se debe poner en juego en las evaluaciones. Así que es de esperarse que el alumno se enfrente a actividades no realizadas en tiempos de clase, pero que puedan abordarse con el material trabajado; debe recurrir a plantearse las preguntas:

- *¿Cómo uso lo que sé para resolver lo que se me pide? Si hago tal o cual cosa ¿qué encontraré? ¿Valdrá la pena intentar tal o cual camino?*

De esta forma se abordarían los contenidos indicados en los programas de estudio del primer grado de educación secundaria y las competencias requeridas en el nivel 1 y 2 de PISA.

Segunda secuencia didáctica

Niveles 3 y 4 de PISA y Segundo Grado de Educación Secundaria

Es posible ahondar en las relaciones encontradas y ampliar el análisis de la situación que se ha considerado. Es decir, se puede aprovechar esta misma situación para abarcar otros subtemas del segundo grado y los niveles 3 y 4 de PISA:

Programa de Matemáticas	PISA
Reconocer en situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar esta relación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$. (p.86)	<p>Resolver problemas que impliquen trabajar con representaciones múltiples (textos, gráficas, tablas, fórmulas) que incluyan cierta interpretación y razonamiento en contextos familiares, así como la comunicación de argumentaciones.</p> <p>Entender y trabajar con representaciones múltiples, incluyendo modelos matemáticos explícitos de situaciones del mundo real para resolver problemas prácticos. Tener flexibilidad en la interpretación y razonamiento en contextos no familiares; y comunicar las explicaciones y argumentaciones resultantes.</p>

Parte de los planteamientos que se trabajarían en este grado ya se iniciaron en el planteamiento anterior, por lo que el trabajo puede verse favorecido por las experiencias anteriores.

Es importante tener en cuenta que en la secuencia anterior se realizaron representaciones gráficas *discretas*, es decir, formadas solamente por puntos, en esta ocasión se trabajarán para representaciones *continuas*, es decir, dibujando las líneas rectas correspondientes.

El paso de representaciones gráficas discretas a continuas no es sencillo, sin embargo, se aprovechará este espacio para proponer una forma sencilla de trabajarlo.



Nuevamente partiendo de lo que ocurre cuando se desplaza una persona, tenemos que aprovechar lo que se elaboró con anterioridad para ampliar lo que se *aprendió* o mejor dicho para avanzar en la *construcción* de conocimientos y procedimientos.

Aunque también podemos suponer que trabajamos con estudiantes que no pasaron por la experiencia anterior.

Como elementos fundamentales de la propuesta didáctica subyacente ya se comentaron con anterioridad, y en otro apartado se volverán a considerar, en esta parte se presentan comentarios más breves.

De acuerdo con los contenidos por cubrir se puede plantear el siguiente *objetivo*:

Objetivo

Analizar el desplazamiento de personas para determinar indicadores en la representación numérica (tablas), algebraica (expresión de la función correspondiente) y figurativa (gráfica) que permitan describir el movimiento de manera global.

Es decir, más allá de la descripción puntual.

En la actividad se consideran algunos *conceptos o procedimientos*, como:

Conceptos y procedimientos

El concepto de linealidad y procedimientos de cálculo para determinar el valor de una incógnita en ecuaciones de primer grado sencillas, además del uso del plano cartesiano para construir gráficas continuas de relaciones funcionales lineales.

Bajo las consideraciones anteriores podemos decir que los *aprendizajes esperados* son:

Aprendizajes esperados

Que los estudiantes identifiquen el papel que juegan las cantidades y variables que conforman una función lineal o su gráfica.

También que identifiquen, a partir de la expresión lineal, la gráfica correspondiente sin tabular y que a partir de la representación gráfica, concordante con una línea recta, determinen la expresión de la función que corresponde.

Cabe insistir en que los *tiempos considerados* son solamente una estimación y que la puesta en práctica de estos planteamientos y las condiciones contextuales podrán determinar los tiempos de manera más precisa.

Es en la planeación de clase donde se deberá establecer si la actividad se realizará en el salón de clase o fuera de él, como *tarea*.



Primer acercamiento

Hay carreras como las de relevos, que no inician siempre en la línea de salida.

Organizados en equipos de cinco determinen la distancia que recorre uno de los miembros de cada equipo y los tiempos que emplea para ello.

Las mediciones se realizarán de tal manera que el estudiante, que corre, ya haya iniciado su carrera antes y se tomarán medidas de distancias recorridas y de tiempos empleados para ello, a una distancia dada (pueden ser a lo más cinco metros).

Tiempo (20 minutos)



No se mide

Se hacen mediciones

Los recursos serán los siguientes:

Recursos

Una cinta métrica para medir distancias más o menos grandes y un cronómetro.

Las calculadoras y las hojas electrónicas pueden ser un apoyo muy importante para encontrar relaciones entre las tres representaciones de una función o para identificar regularidades entre sus valores.

Es importante iniciar el recorrido antes de comenzar la medición de tiempos y distancias, pues la idea es intentar obtener mediciones relacionadas con velocidades (aproximadamente) constantes, de no lograrlo, los datos recopilados serán de poca utilidad.

El trabajo colegiado es mejor

Trabajar en este tema con profesores de otras asignaturas relacionadas con la Física puede ser de mucha utilidad.

Después de haber realizado mediciones de uno o varios recorridos, se plantean preguntas:



¿Cómo fueron las mediciones del grupo X? ¿Cómo las realizaron? ¿A qué resultados llegaron? ¿Qué fue lo que obtuvo el grupo Y? etcétera.

Tiempo(15 minutos)

Si hay diferencias muy notorias puede dedicarse un tiempo a discutir la causa de éstas.

Lo importante en todo caso es que se trabaje con tiempos y distancias correspondientes a velocidades más o menos constantes y que las variaciones de velocidad sean *despreciables*.

Pueden plantearse estas preguntas:

¿Cuántos metros recorrieron por segundo? ¿Cuántos por minuto? etcétera.

Tiempo (10 minutos)

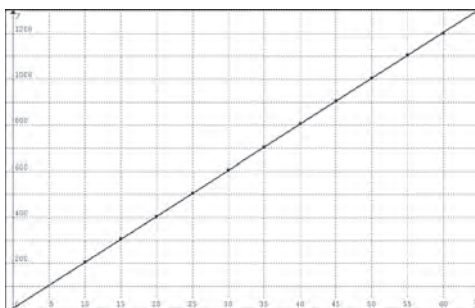
Trabajando al inicio con números sencillos es posible abordar algunas nociones como las de velocidad, pues las diferencias entre los desplazamientos reportados por cada grupo pudieron deberse a la velocidad de cada alumno, pero debe insistirse en que las velocidades fueron, aproximadamente, constantes en cada grupo. Incluso, se puede comentar que para asegurar esa condición se tomaron mediciones una distancia después de haber iniciado la carrera.

Conviene que cada equipo elabore una tabla y una gráfica con los valores obtenidos en las mediciones (posiblemente la realizarán por medio de puntos en un plano cartesiano, pero se les pedirá que unan dichos puntos para observar el tipo de figura se traza con ellos).

Cada equipo elabore una tabla o una gráfica con los datos recabados y compárela con la que obtuvo otro equipo.

Tiempo (10 minutos)

Tiempo en segundos	Distancia recorrida en metros
10	2.05
15	3.05
20	4.05
25	5.05
30	6.05
35	7.05
40	8.05
45	9.05
50	10.05
55	11.05
60	12.05



Segundo acercamiento

Teniendo las gráficas de los estudiantes a la mano se les pide que encuentren valores intermedios, es decir, el recorrido obtenido si se hubiera realizado la medición en dichos tiempos.

Considerando los datos incluidos en la tabla anterior, se pueden plantear preguntas como:

Si se hubiese realizado la medición a los 12 segundos ¿Qué distancia se hubiera recorrido? ¿Por qué? ¿Cómo se puede argumentar que ese valor es "factible"?
¿Qué distancias se hubieran recorrido a los 22.5, 37, 58 segundos?

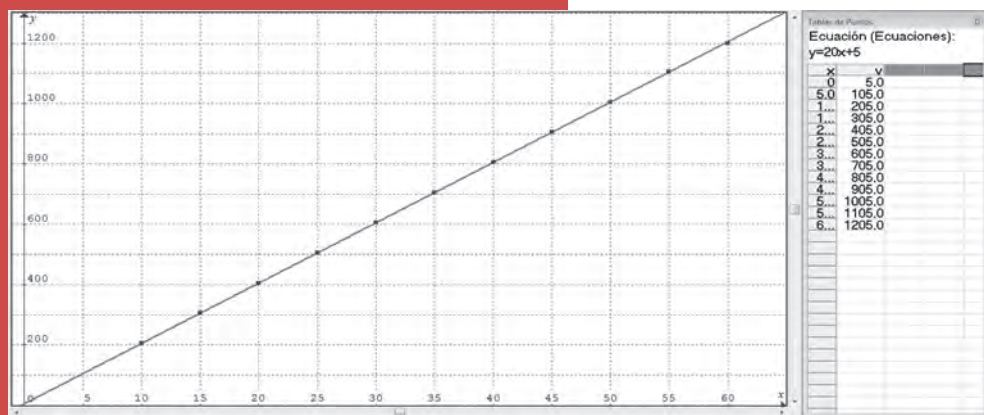
Tiempo (20 minutos)

Lo anterior permitirá analizar con más detalle las relaciones numéricas entre los datos y los puntos de la gráfica.

Se esperan respuestas como:

- A los 12 minutos la distancia debiera de ser aproximadamente 20 veces 12 más 5, pues todos los datos de la tabla se obtienen haciendo esas operaciones
- De acuerdo con la gráfica de la recta, pues los puntos obtenidos de la tabla están en ella, se puede decir que el valor que debe corresponder a 12 minutos es aproximadamente 246, aunque no se puede medir exactamente

Así, de la tabla o gráfica se puede encontrar la expresión algebraica correspondiente: $y=20x+5$ y comprobar que otros valores calculados con dicha expresión son también puntos de la recta graficada.



¿Qué expresión algebraica podemos relacionar con los datos?

Tiempo (10 minutos)

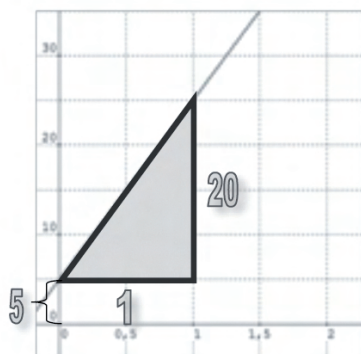


De esta forma el estudiante podrá conocer algunas relaciones entre la gráfica discreta y continua, además de las que existen entre la tabla y la expresión algebraica correspondiente.

Para enfatizar esas relaciones entre la gráfica y la expresión algebraica, se llamará la atención a los triángulos rectángulos que tengan los vértices de la hipotenusa en la recta, entonces la razón entre el cateto vertical y el horizontal siempre será igual a 20, en el caso bajo estudio:



$$\frac{\text{cateto vertical}}{\text{cateto horizontal}} = 20$$



Veamos si trazamos triángulos-rectángulos con hipotenusa en la recta. ¿Qué relación hay entre los lados de estos triángulos que no caen en la recta?

¿En que número corta la recta al eje de las ordenadas?

¿Qué relación tiene lo anterior con la expresión algebraica de la recta?

Tiempo (15 minutos)



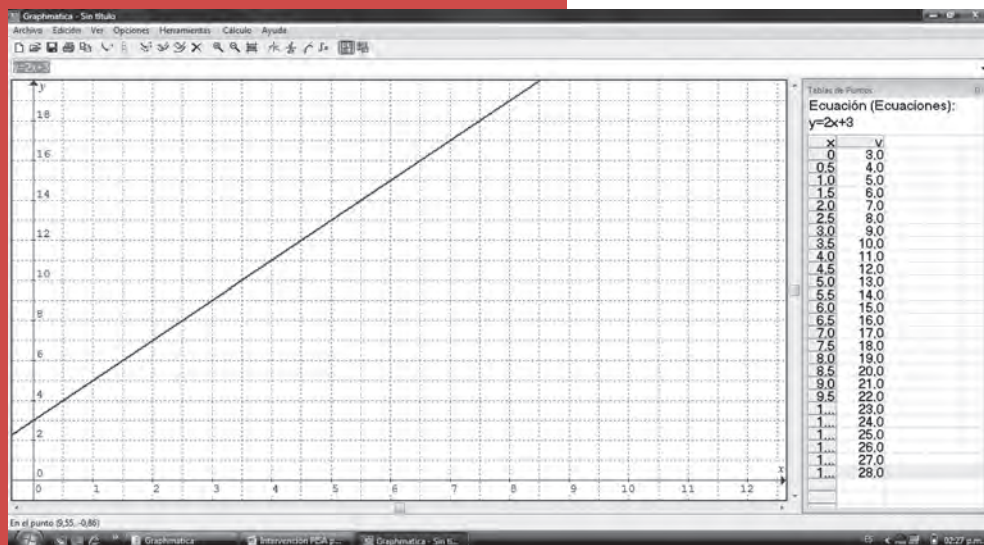
La idea es que reconozcan que el coeficiente de la variable x es quien marca la *inclinación* o *pendiente* de la línea recta en su gráfica y que la constante indica el punto donde la recta corta al eje de las ordenadas:



Se pedirá a los alumnos que comprueben esta *conjetura* con otras expresiones algebraicas correspondientes a funciones lineales de dos variables:

Comprueben que usando triángulos-rectángulos es posible reconocer la pendiente de una recta y que en la ecuación se puede identificar también donde la recta corta al eje de las ordenadas.

Tiempo (10 minutos)



Tercer acercamiento

Las relaciones encontradas entre las diferentes representaciones de las funciones lineales de dos variables pueden utilizarse para realizar otras actividades que ayudan al desarrollo de otras habilidades o competencias de interés.

Dadas las siguientes tablas encuentren las expresiones algebraicas correspondientes y sus gráficas.

Tiempo (25 minutos)

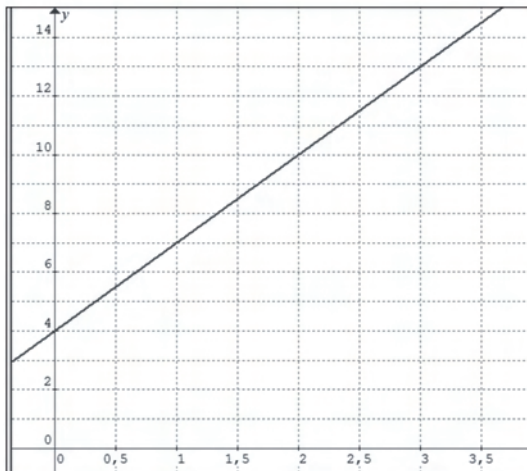
Basta plantear tablas sencillas como:

X	Y
0.0	4.0
0.5	5.5
1.0	7.0
1.5	8.5
2.0	10.0
2.5	11.5
3.0	13.0
3.5	14.5
4.0	16.0
4.5	17.5
5.0	19.0
5.5	20.5
6.0	22.0
6.5	23.5

Dadas las siguientes gráficas encuentren valores de la tabla y la expresión algebraica correspondiente.

Tiempo (25 minutos)

Se espera que se pueda realizar esto en gráficas como:



Cuarto acercamiento

Es importante que los estudiantes reconozcan a la pendiente de la recta como la velocidad y puedan identificarla en algunas ecuaciones de Física o Química, pues no solamente se pueden tener velocidades respecto a desplazamientos, sino se puede hablar de velocidades de reacciones o de variaciones de monedas, entre otros temas.

En equipos de cinco planteen diversas situaciones en las que las velocidades puedan emplearse por ejemplo, en carreras de personas o vehículos, cambio de una moneda respecto al tiempo, etcétera.

Tiempo (25 minutos)

Algunas respuestas pueden ser del tipo:

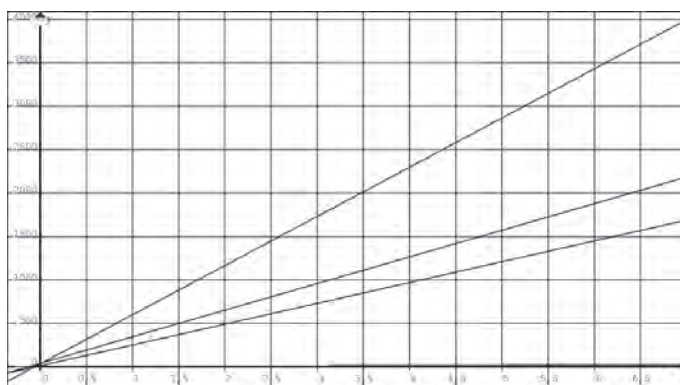
- Un entrenador mide la velocidad de un corredor la cual se mantiene constante, pero inicia sus mediciones un tiempo posterior al inicio de la carrera si la expresión algebraica es... (o puede ser la gráfica o la tabla), encuentra las otras dos representaciones del movimiento del corredor.
- El cambio del precio de un combustible se representa en la siguiente gráfica, encuentra la expresión algebraica correspondiente y elabora una tabla del valor_ al valor_ de la variable independiente.

También se pueden analizar algunas gráficas que contengan rectas y aparezcan en los medios impresos o en avisos o propagandas de instituciones bancarias o de salud, entre otras.

En sus equipos consideren las siguientes gráficas y analicen la velocidad de cambio de una variable respecto a la otra.

Tiempo (15 minutos)

Las gráficas en cuestión pueden ser del siguiente tipo:



Referidas, por ejemplo, al tipo de cambio de la moneda de algunos países caribeños respecto al dólar.

Se podrá identificar en ellas si crece el tipo de cambio al mismo *ritmo*, es decir, si la variación corresponde o no a la misma velocidad, de esta forma habrá que determinar cuáles países tienen problemas más importantes de inflación.

Es importante usar la información de una función lineal para transformarla y hacerla corresponder con otras situaciones planteadas de antemano.

El desempeño de un corredor se muestra en la siguiente gráfica, ¿qué se le debería pedir para que incremente su velocidad como indica la otra gráfica?

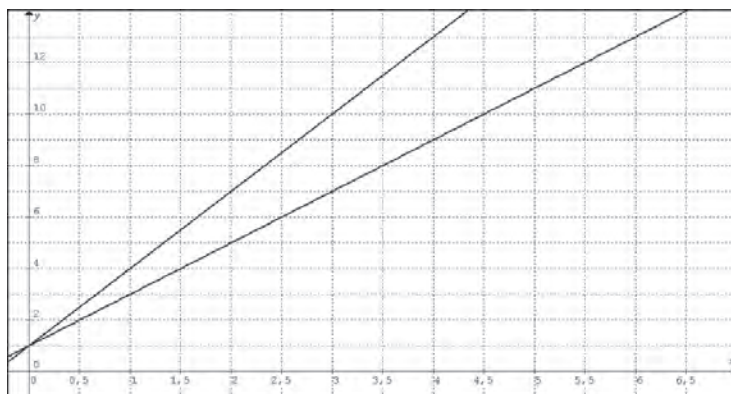
¿Cuánto se le pide incrementar su velocidad? ¿En cuánto tiempo recorre 50 m y en cuánto tiempo se le pide recorrerlos?

¿Qué distancia recorre en 30 segundos y cuánta distancia se le pide recorrer?

Con este modelo planteen varias situaciones similares, pueden usar los mismos datos o no, pero debe cambiarse el contexto.

Tiempo (15 minutos)

En esta situación se tendría una gráfica del tipo:



Y se utilizaría la información contenida en ella para programar el entrenamiento del corredor hacia el alcance de ciertas metas.

x	v1	v2
0	1.0	1.0
0.5	2.0	2.5
1.0	3.0	4.0
1.5	4.0	5.5
2.0	5.0	7.0
2.5	6.0	8.5
3.0	7.0	10.0
3.5	8.0	11.5
4.0	9.0	13.0
4.5	10.0	14.5
5.0	11.0	16.0
5.5	12.0	17.5
6.0	13.0	19.0
6.5	14.0	20.5

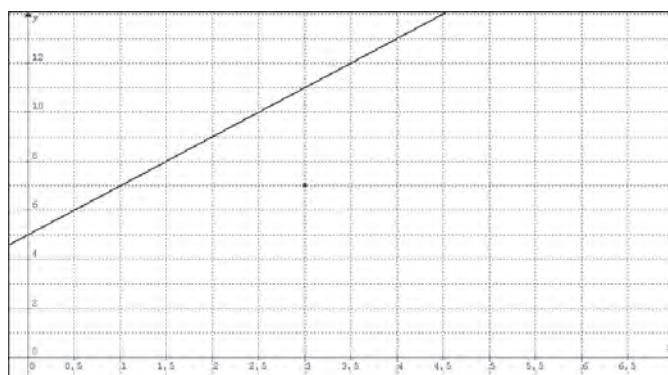


Evaluación formativa

Nuevamente se debe intentar trabajar los mismos temas abordados, pero dando espacio a situaciones que impliquen un esfuerzo adicional a los estudiantes que solamente el recurrir a estereotipos o a la memoria.

Por ejemplo se pueden plantear algunas actividades como:

- Encuentra *las gráficas y expresiones algebraicas* que corresponden a las siguientes tablas, además encuentra la expresión algebraica de una función lineal cuya gráfica esté en el interior del ángulo que forman las gráficas anteriores:
- Encuentra *valores para pendiente y el número donde corta la recta al eje de coordenadas* de tal modo que la gráfica de la recta $y=2x+5$ pase por el punto (3, 7) ¿Si solamente se puede modificar m como quedaría la expresión? ¿Si solamente se puede modificar b como quedaría la expresión?



También se pueden incluir situaciones en las que dado un problema *planteen otro* con la misma función, pero que considere un contexto diferente.

Por ejemplo, el siguiente problema:

En una fábrica había 12 botellas de agua purificada llenas y se inicia la jornada llenando 3 botellas por minuto ¿Cuántas botellas se llenarían cada 5 minutos en el transcurso de seis horas?

Resuélvelo y utiliza los datos para plantear dos problemas referidos a *otros contextos pero con los mismos datos*.

Tercera secuencia didáctica

Niveles 5 y 6 de PISA y Tercer Grado de Educación Secundaria

En el tercer grado se podrá intentar abordar, a partir de la situación que se ha trabajado, otros niveles planteados en PISA.



Programa de Matemáticas	PISA
<p>Reconocer en diferentes situaciones y fenómenos de la Física, la Biología, la Economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra y representar la regla que modela esta variación mediante una tabla o una expresión algebraica. (p. 123)</p>	<p>Resolver problemas, usando el álgebra avanzada, modelos y expresiones matemáticas formales. Asociar representaciones matemáticas formales a situaciones complejas del mundo real. Usar habilidades de solución de problemas complejos y de multinivel. Reflexionar y comunicar razonamientos y argumentaciones.</p> <p>Usar comprensión significativa y habilidades de razonamiento y argumentación abstractas. Tener conocimiento técnico y de convenciones para solucionar problemas y generalizar soluciones matemáticas a problemas complejos del mundo real.</p>

De manera sintética se plantea la siguiente secuencia didáctica. Primero señalamos lo que se tiene como meta:

Objetivo

Utilizar las situaciones de movimiento para analizar la variación de una cantidad respecto a otra, a partir de una tabla, una expresión algebraica y una gráfica a fin de relacionar diversos tipos de movimientos similares.

Después los aspectos conceptuales o procedimentales implicados.

Conceptos y procedimientos

Concepto de función lineal y cálculo de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

También lo que se espera de los estudiantes.

Aprendizajes esperados

Que los estudiantes identifiquen el papel que juegan las cantidades y variables que conforman una función lineal, o su gráfica. También que identifiquen a partir de la expresión lineal, la gráfica correspondiente sin tabular y que a partir de la representación gráfica, correspondiente con una línea recta, determinen la expresión de la función que corresponde.



Nuevamente serán importantes los materiales con los que se debe contar.

Recursos

En esta experiencia no se utilizarán recursos materiales aparte del papel y lápiz, aunque pueden incluirse el uso de calculadoras básicas para ayudar a comprobar resultados y realizar algunas operaciones.

Incluso puede ser importante incorporar hojas electrónicas de calculadoras o computadoras para capturar datos y organizarlos, además de realizar las operaciones necesarias y encontrar regularidades.

Primer acercamiento

Se plantea la siguiente situación:

Hacia el encuentro

Organizados en equipos de cinco aborden la siguiente problemática: Dos personas que se encuentran a 20 m de distancia, salen al mismo tiempo a la calle y la recorren en direcciones contrarias.



Si cada uno avanza un metro por segundo, encuentren respuestas a las siguientes preguntas:

¿En cuánto tiempo recorren la distancia entre ellos?

¿A qué distancia se encuentran a lo largo del recorrido?

¿Qué expresiones algebraicas corresponden a cada recorrido? Elabora una tabla de cada uno de los recorridos.

Si se elabora una gráfica en la que se incorporen las gráficas de los dos recorridos ¿qué punto indica donde los caminantes se encuentran?

¿A qué velocidad cada uno de ellos hace el recorrido?

Tiempo (30 minutos)

En este momento se presenta una situación sencilla que implica el manejo de dos funciones lineales:

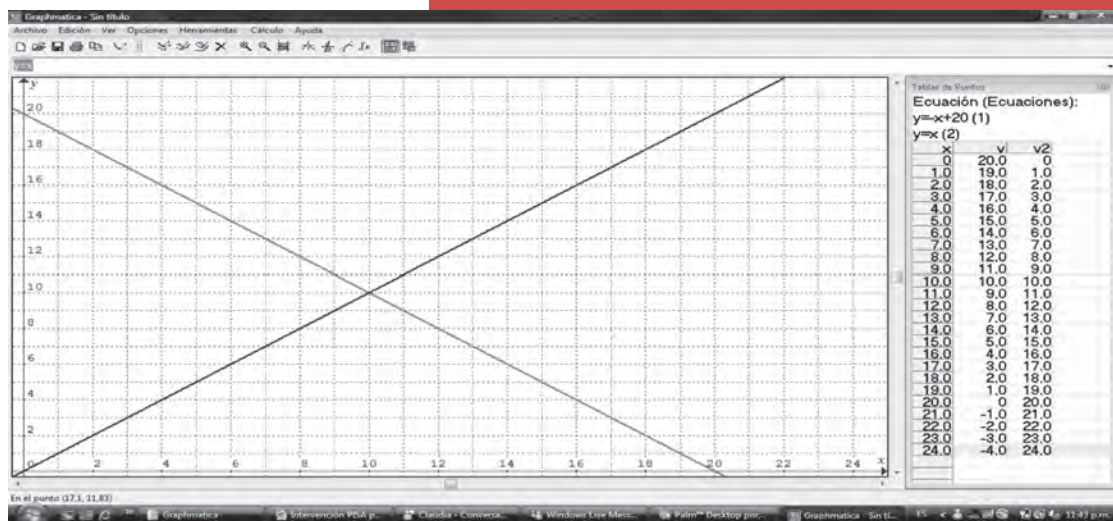
$$y = -x + 20 \quad \text{y} \quad y = x$$

De manera simultánea analizarán dos movimientos contrarios y determinarán una interpretación de cada uno de los avances en el tiempo, pero donde las interpretaciones de cada recorrido obliguen a utilizar representaciones algebraicas y gráficas diferentes para hacer un seguimiento de cada uno de ellos y encontrar relaciones entre ellas.

También en términos de la Física se da un sentido a la velocidad para ser considerada positiva o negativamente. Las representaciones algebraicas, gráficas y numéricas corresponderán a la que enseguida se muestra.

Aquí se observa el punto de intersección que deberá interpretarse adecuadamente. Si no se han abordado métodos para resolver dos sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, la gráfica puede ser de gran utilidad para determinar el instante y la distancia del punto de encuentro, que seguramente lo han conjeturado ya entre ellos.

Si ya se han trabajado métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se podrá encontrar el punto de intersección haciendo uso de esos procedimientos, pero en todo caso lo importante es la interpretación.



*¿Qué sucede si uno camina el doble de distancia, por segundo, que el otro?
¿A qué distancia se encontrarán a lo largo del recorrido?
¿Qué expresiones algebraicas corresponden a cada recorrido?
Grafiquen los dos recorridos en la misma gráfica y determinen el punto de encuentro. Elabora una tabla de cada uno de los recorridos.
¿A qué velocidad hace el recorrido cada uno de ellos?*

Tiempo (20 minutos)

Segundo acercamiento

Aprovechando la experiencia anterior se deberá pedir que se modifiquen las condiciones del problema, distancia entre los sujetos y velocidades de cada uno, pero que los equipos de estudiantes hagan sus propuestas.

Organizados en equipos de cinco, planteen y resuelvan problemas similares al encuentro de personas pero con datos diferentes de la distancia entre los sujetos y las velocidades de cada uno.

Tiempo (25 minutos)

Se esperan respuestas del tipo:

- Dos personas que se encuentran a 17 m de distancia, salen al mismo momento a la calle y la recorren en direcciones contrarias.
- Si uno avanza 1.7 m/seg y el otro 2.3 m/seg

Utilice tablas, gráficas y expresiones funcionales lineales para responder lo siguiente:

- ¿En cuánto tiempo recorre cada uno la distancia entre ellos?
- ¿A qué distancia se encuentran a lo largo del recorrido?

Dada una situación, es importante que se planteen soluciones requeridas y solicitar que se determinen los datos necesarios para obtenerlas.

En equipos de cinco integrantes planteen los datos necesarios para que las soluciones de los siguientes problemas sean las que se dan: Dos personas se encuentran a 100 m de distancia y caminan uno hacia el otro, si se deben encontrar en 15 segundos ¿qué velocidades deberán tener?

Dos trenes viajan por la misma vía pero en direcciones contrarias, están alejados a 56 Km de distancia, parten en el mismo instante ¿qué velocidades deben tener para colisionar en media hora?

Tiempo (20 minutos)



Evidentemente habrá una cantidad infinita de soluciones, explorar este tipo de situaciones se pide en el enfoque de los cursos de la asignatura de Matemáticas de la educación secundaria.

Tercer acercamiento

Es momento de poner atención en los métodos de solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, pues se ha insistido en la relación que tienen ese tipo de expresiones algebraicas con funciones lineales.

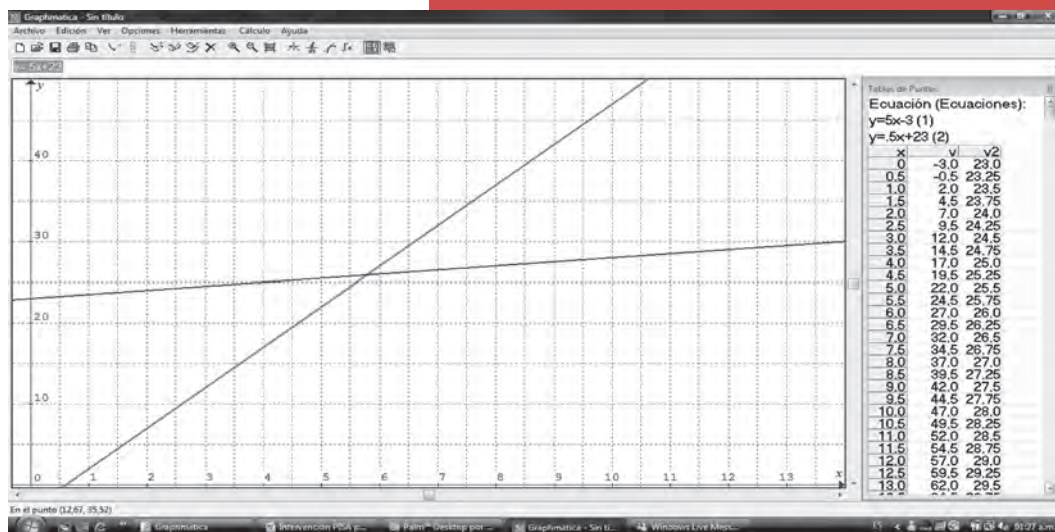
Se puede considerar el trabajo de sistemas de ecuaciones en abstracto, y como parte de la actividad, que los estudiantes planeen problemas relacionados con los datos que se les dan.

Organizados en equipos de cinco personas, resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones y planteen dos problemas que deban resolverse utilizando el sistema dado.

Tiempo (50 minutos)

Los sistemas de ecuaciones deben presentarse en forma de tabla, con expresiones algebraicas y por medio de gráficas, de tal modo que los estudiantes deban transitar por las representaciones de interés en PISA y los planes de estudio.

En la siguiente figura se presentan tres representaciones de funciones lineales, de las cuales se puede utilizar cualquiera para la actividad anterior.



Evaluación formativa

Conviene incorporar actividades que completen los asuntos reflexionados en el tema que se abordó. Por ejemplo: dar el *punto de intersección y una de las ecuaciones*, para encontrar la otra.

Lo anterior puede ser en un contexto o no.

Dado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (presentado en diversas representaciones: tabla, gráfica o expresiones algebraicas), se puede plantear la *variación de algunos de los coeficientes* de alguna de ellas que conduzca a una solución deseada.

IV. Recomendaciones para el trabajo con otros docentes

Las acciones de los maestros en asuntos relacionados con la docencia, se coordinan con aspectos que no todos tienen claro, por ejemplo, la concepción que tienen sobre las Matemáticas.

Algunos consideran que las Matemáticas son asunto de algoritmo y respuesta, de dominar los aspectos rutinarios, pero otros quieren ligar más su trabajo docente con la actividad matemática misma y con sus métodos de descubrimientos.

Al respecto un célebre matemático, Gustav Choquet⁸, expresó que los métodos de descubrimiento en Matemáticas son:

- *Relajamiento de axiomas*
- *Refuerzo de axiomas*
- *Estudio de estructuras próximas*
- *Creación de estructuras sometidas a exigencias previas*

Tal vez estos métodos no ofrezcan muchas ideas a docentes alejados del formalismo en Matemáticas o de los trabajos de investigación de matemática pura, pero han tenido mucha importancia en la historia moderna de esta disciplina.

Su importancia no solamente radica en las Matemáticas, es fundamental considerarlos en la enseñanza. Por analogía, teniendo en cuenta la resolución de problemas, podemos transformar lo expresado por Choquet a esta Competencia matemática. Así es posible enunciar los siguientes métodos para trabajar en el contexto de resolución de problemas:

- *Relajamiento de los datos y/o condiciones de un problema*
- *Refuerzo de datos y/o condiciones de un problema*
- *Estudio de problemas similares*
- *Creación de problemas sometidos a exigencias previas*

Las secuencias didácticas presentadas con anterioridad tienen respaldo en esta perspectiva sobre la resolución de problemas.

Es decir, no basta resolver un problema. Encontrar una solución es apenas el inicio de la experiencia matemática que se enfatiza en PISA y en los programas de estudio.

Es relevante determinar si se pueden quitar datos o cambiarlos, ensayar otros acercamientos al problema, proponer modificaciones a los datos y condiciones del problema, a fin de conocer si eso afecta el proceso

⁸J. Choquet (1975). El análisis y Bourbaki. en Hernández, J. (Coord.). *La enseñanza de la matemática moderna*. Madrid: Alianza.



para encontrar una solución; analizar cómo emplear los mismos métodos en la resolución de otros problemas, aparentemente ajenos o similares, además de intentar encontrar soluciones cortas y crear otros problemas en los que se establecen nuevas condiciones.

También un trabajo realizado a mediados del siglo pasado resalta otros elementos para ser tomados en cuenta en la enseñanza, lo que encontró el psicólogo ruso Krutetskii⁹, fueron varias habilidades matemáticas como:

- *Flexibilidad del pensamiento*
- *Reversibilidad del pensamiento*
- *Generalización*

Estas habilidades se adoptaron en varios aspectos de las secuencias didácticas ofrecidas, pues son elementos distintivos que se obtienen con el desarrollo del pensamiento matemático. La propuesta se ha difundido por medios escritos¹⁰ y consiste de varias etapas que se enuncian a continuación:

- *Planteamiento de un problema*
- *Elaborar estimaciones de la solución y discutir las*
- *Resolver el problema “como se pueda”*
- *Discutir algunas formas de solución encontradas*
- *Especificar una solución y acomodar los datos a ésta*
- *Plantear problemas similares*

Se recomienda que el trabajo docente se realice con ideas como las expuestas, pues la enseñanza vía el *entrenamiento* y *repetición* no permite el desarrollo de habilidades o competencias matemáticas.

El estudiante debe explorar varias situaciones con una perspectiva matemática y crear sus propios métodos y significados, los cuales, en el transcurso de su experiencia podrá modificar y acercar a las convenciones que conforman el contenido formal.

Es importante señalar que el problema debe referirse a una situación que el estudiante no sabe cómo abordar en un primer momento, pero tampoco lo debe inmovilizar, pues de no ser así no lo podrá adoptar como un reto y lo dejará de lado, por ello en primera instancia se utilizan cantidades o contextos *cómodos*.

Pedir estimaciones a los estudiantes obliga a interpretar adecuadamente el problema y ayuda a lograr una mejor comprensión de éste.

La autoestima del estudiante se incrementa al permitirle que resuelva los problemas con métodos sencillos (los cuales generalmente se pueden realizar por el tipo de datos que se incluyen), esta parte es importante pues permite que el estudiante se sienta confortable y acepte seguir trabajando el problema desde otras perspectivas.

Cuando se cambian los datos del problema, el estudiante se percata que algunos métodos no son tan generales y trata de analizarlos para adoptarlos, dado que le facilitarán el trabajo con más problemas similares.

⁹ V. Krutetskii (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. USA: University of Chicago Press.

¹⁰ E. Mancera (2001). *Saber matemáticas es saber resolver problemas*. México: Iberoamérica.



Plantear problemas con el mismo texto pero a partir de indicar una solución deseada y determinar los datos necesarios para obtenerlos, incrementa la comprensión de la relación entre datos y solución y permite trabajar otros contenidos y procedimientos. Pero, sobre todo, es una parte importante en la construcción del pensamiento matemático.

El cambiar el contexto de los problemas permite generalizar los procedimientos trabajados y valorar las posibilidades de los métodos empleados.

El desarrollo de habilidades o competencias matemáticas no depende de un contenido o de una técnica específica de enseñanza, requiere mucha atención de los docentes en los procesos de los estudiantes y apoyarlos para que reflexionen sobre lo que trabajan formulando diversas preguntas que tienen relación con los planteamientos de Choquet o Krutetskii.

Cabe mencionar que la comunicación del maestro de Matemáticas con los maestros de otras asignaturas es vital para cubrir en la Competencia matemática el aspecto referido a la situación pues se deben abordar los niveles personal, público, educativo, laboral y científico. Esta relación permitirá identificar los asuntos que pueden trabajar los maestros simultáneamente beneficiando con ello la articulación de contenidos y la integración del conocimiento.

Siempre será importante que el maestro busque coordinar su trabajo con otros maestros de la misma asignatura, aunque para hacer realidad varios aspectos de los planes y programas de estudio será también relevante que *el maestro realice su trabajo buscando el apoyo de otros maestros de otras asignaturas* quienes le ayudarán a encontrar algunas aplicaciones y podrán corregir o enriquecer algunas actividades para la clase de Matemáticas.

El trabajo con colegas de otras disciplinas se debe iniciar con la presentación de ideas y actividades que permitan reconocer la utilidad de éstas para los propósitos educativos de uno y otro. Cada uno puede tomar en clase lo que le convenga de las experiencias realizadas, no importa si se trabaja en el mismo grado o no, en las escuelas siempre es posible recordar a los estudiantes lo que trabajaron con otros maestros de grados anteriores.

Es importante que los ejemplos que se trabajen en la clase de Matemáticas no induzcan concepciones erróneas en los estudiantes que les causarán conflictos en otros cursos, pero también quienes emplean los conceptos y procedimientos de las Matemáticas deben seguir las ideas, notaciones y representaciones que se trabajan en los cursos de Matemáticas.

La tarea educativa es lo suficientemente compleja para pensar que un solo individuo puede con ella.

V. Recomendaciones para el trabajo con la familia

El maestro puede involucrar a los padres de familia o a otros miembros de ella si en las actividades o tareas que se realizan fuera de clase se pide involucrar a los familiares, planteando actividades en las que el estudiante deba consultar a distintos miembros de la familia.



Por ejemplo, pidiendo que se planteen problemas que impliquen las actividades productivas de los padres de familia, lo cual implicará que se involucren con el estudiante para vincular su trabajo escolar con aspectos de la vida laboral.

También es importante que se dejen al estudiante actividades relacionadas con su vivienda. De acuerdo con los contenidos manejados en varios períodos escolares, se puede pedir que el estudiante maneje datos del sector laboral del padre y plantee problemas sobre ellos y que conjuntamente con otros miembros busquen en los medios de información escrita algunas situaciones que se pueden analizar con los contenidos escolares que se trabajan.

La interrelación entre los miembros de la familia dependerá de las actividades que los involucren, no conviene considerar revisiones y otros asuntos en los que la familia puede decidir si se hace o no, si las tareas dependen de informaciones que se deben obtener en la familia, se podrá interesarlos sobre los temas que se están trabajando en la escuela.

Recomendaciones de lecturas para los docentes

Las siguientes lecturas se sugieren con el fin de que el maestro pueda tener a la mano varios recursos para su desarrollo profesional y personal.

Para la preparación de clase se recomiendan las siguientes lecturas:

- Chamoso, J. y W. Rawson (2005). *Contando la geometría*. Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.
- Chamoso, J. et al. (2006). *Matemáticas desde la prensa*. Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.
- Chamoso, J. et al. (2006). *Organizando la estadística*. Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.
- Gascón, J. (1993). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática. *Revista Educación Matemática*. 6 (1).
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM: USA.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Para compartir algunos espacios con otros colegas se pueden considerar las siguientes lecturas:

- Adda, J. (1987). *Elementos de didáctica de las matemáticas*. México: Sección de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN.
- Bishop, A. (1990). *Enculturación y Educación Matemática*. Madrid: Paidós.
- Kilpatrick, J. (1990). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. En: Silver, E. (ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale: Lawrence, Erlbaum.
- Kline, M. (1975). *¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo XXI.
- Mancera, E. (1991). La matemática de la educación básica: el enfoque de la modernización. *Revista Educación Matemática*. 3 (3).



- Mancera, E. (1989). *Errar es un placer*. México: Iberoamérica.
- NCTM (1980). *Problem Solving in School Mathematics*. Virginia: NCTM.
- Peñañiel, A., B. Reys y R. Reys (1990). Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas de alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México. *Educación Matemática*. 2 (1).
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*. 15.
- Vergnaud, G. (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.



PROPUESTA DIDÁCTICA PARA *PROBABILIDAD*

Teresa Fonseca Cárdenas

I. Asociación de PISA con el plan y el programa de estudios de secundaria

El acelerado cambio demográfico, social, económico y político que estamos viviendo tanto en nuestro país como en todo el mundo, demanda que la educación se transforme; no se puede enseñar a los jóvenes de hoy de la misma manera que se hacía en tiempos anteriores, esto obliga a reflexionar acerca de los ciudadanos que se quieren formar y el país que se quiere construir, por lo consiguiente, hay que enfrentar enormes retos para estar en condiciones de cumplir con los objetivos que se proponen.

Para enfrentar estos retos la educación básica propone formar a jóvenes para que participen en la construcción de una sociedad democrática, integrada, competitiva y proyectada al mundo, por eso es necesario que la educación se transforme progresivamente para que atienda los retos urgentes como la cobertura, permanencia, calidad y equidad.

Esto es fundamental para construir un país equitativo, democrático y próspero, que responda a los principios que están plasmados en el Artículo Tercero Constitucional, en la Ley General de Educación y en el Plan Nacional de Educación 2001- 2006, donde se concreta el compromiso de impulsar una reforma de educación que impulse la educación como un derecho de toda persona para desarrollar armónicamente todas las facultades como ser humano.

Para lograr lo anterior se ha establecido un perfil de egreso que define el tipo de ciudadano que se espera formar en su paso por la educación obligatoria; el cual constituye un referente obligado de la enseñanza y del aprendizaje en las aulas, una guía de los maestros para trabajar con los contenidos de las diversas asignaturas y una base para valorar la eficacia del proceso educativo.

El perfil se plantea como un conjunto de rasgos que los estudiantes deberán tener al término de la educación básica para desenvolverse en un mundo de constante cambio y que son resultado de una formación que destaca la necesidad de fortalecer las competencias para la vida.

Esto no se refiere sólo a lo relacionado con los aspectos cognitivos sino que incluye también el fomento a las actitudes y valores que favorecen su desarrollo, la convivencia pacífica con apego a la legalidad y el



cuidado y respeto por el ambiente; que movilicen sus saberes dentro y fuera de la escuela, es decir, que apliquen lo aprendido en situaciones cotidianas.

En este contexto, una competencia implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias del impacto de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado.

Por lo tanto, los programas de las diferentes asignaturas se constituyen, además de conjuntos organizados de contenidos que se van a estudiar, como una herramienta para la transformación en la dinámica escolar que promueva la convivencia y el aprendizaje en ambientes colaborativos y desafiantes, que posibilite la relación entre los miembros de la comunidad escolar, en especial de maestros y alumnos y facilite que éstos últimos integren los conocimientos que adquieren en las diversas asignaturas.

Las competencias básicas para la vida, propuestas para contribuir al logro del perfil de egreso y que deberán desarrollarse en todas las asignaturas, son las siguientes:



Para contribuir al logro de este perfil, el Plan de Estudios propone un enfoque en donde el saber humano se entiende como un proceso dinámico, crítico, reflexivo y el aprendizaje como un proceso de interiorización de los elementos del saber humano como resultado de una construcción individual y social.

Pero entonces, con base en los planteamientos anteriores ¿qué se espera lograr con la formación matemática? ¿Cómo se propone trabajar en el aula? ¿Cuál es el nuevo rol del docente y del alumno?



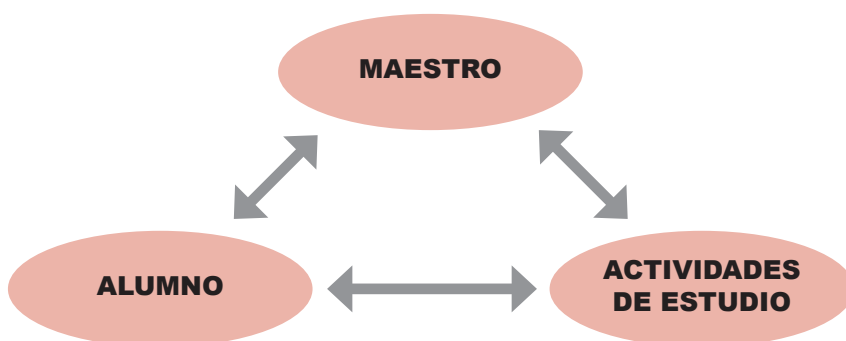
Esto se puede lograr mediante una metodología didáctica que lleve a las aulas actividades de estudio que despierten el interés en los alumnos, los invite a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen sus resultados, para que los alumnos puedan enfrentar y responder a los problemas de la vida moderna lo cual va a depender en gran parte de los conocimientos, habilidades y actitudes desarrolladas durante la educación básica.

Para lograrlo, se requiere que el docente abandone la postura tradicional de explicar paso por paso lo que tienen que hacer, preocupándose por simplificar el camino del estudiante, sino que promueva la formación autónoma de sus alumnos.

Los avances logrados en el campo de la didáctica de la matemática resaltan el papel que desempeñan las situaciones problemáticas que hacen pertinente el uso de las herramientas matemáticas, así como los procesos que siguen los alumnos para construir nuevos conocimientos para superar las dificultades; dicha situación problemática no puede ser tan sencilla que quede fija de antemano, ni tan difícil que parezca imposible de resolver, la solución debe ser construida entendiendo que existen diversas estrategias para solucionarla, pero hay que usar al menos una. Los alumnos tienen que recurrir a sus conocimientos previos, que les permiten reestructurar algo que ya sabe, para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o aplicarlo en una nueva situación (SEP, 2006).

Por lo tanto es fundamental una planeación cuyo punto de partida sean los aprendizajes esperados alrededor de los cuales se generen actividades de estudio, que incluyan una recuperación de conocimientos previos, un momento de confrontación entre ellos, que propicien en los alumnos la reflexión, el análisis y la discusión, que genere la construcción de nuevos aprendizajes y que al ser evaluados vayan más allá de analizar los aprendizajes esperados, que los alumnos puedan conducirse competentemente en la aplicación de las Matemáticas.

Las relaciones que se establecen entre los alumnos, el profesor y el saber, representan un escenario muy favorable para la formación ciudadana, al privilegiar la comunicación, el trabajo en equipo, la búsqueda de acuerdos y argumentos para validar resultados y procedimientos, así como aprender a escuchar las ideas de los demás y modificar las propias, lo cual implica respetar las reglas sociales del debate (SEP, 2006).



La evaluación en el programa de Matemáticas se plantea en dos aspectos. Uno que se refiere a lo que saben los alumnos y en qué medida lo aplican, en estrecha relación con los contenidos matemáticos para lo cual se definen los aprendizajes esperados al inicio de cada bloque. El otro aspecto se refiere al desarrollo de cuatro competencias matemáticas: el *planteamiento y resolución de problemas*, para que aprendan a identificar, plantear y resolver diferentes problemas, la *argumentación*, cuando asumen la responsabilidad de buscar al menos una manera de resolver el problema, la *comunicación*, que comprende la posibilidad de expresar y representar e interpretar información matemática que hay en una situación y el *manejo de técnicas*, que se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos.

Estas competencias se van desarrollando poco a poco con la metodología didáctica propuesta en el programa y para describir el avance el docente tiene que establecer líneas de progreso que definan el punto inicial y la meta a la que se quiere llegar.

Las líneas de progresos que pueden considerarse para la evaluación del logro del aprendizaje van de resolver con ayuda a resolver de manera autónoma, de los procedimientos informales a los procedimientos expertos y de la justificación pragmática a la justificación axiomática.

En cuanto a la organización de los contenidos, su agrupamiento en los programas de Matemáticas de educación básica (preescolar, primaria y secundaria) en ejes temáticos, tiene tres propósitos: uno de ellos consiste en hacer énfasis en los aspectos que interesa estudiar y aprender, otro de ellos consiste en establecer vínculos entre los contenidos de Matemáticas y uno más para establecer líneas de estudio, que inician desde el nivel preescolar y culminan en secundaria. Estos propósitos explican la razón de que se agrupen en tres ejes temáticos: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida, así como manejo de la información.

El primer eje temático establece una línea de continuidad desde preescolar con el estudio del número, hasta el del lenguaje algebraico en secundaria, el segundo eje temático también inicia en preescolar con el estudio de algunas formas y el tercer eje inicia desde primer año de primaria mediante la lectura de información en ilustraciones y tablas, en este eje convergen la probabilidad, la estadística y el estudio de la proporcionalidad.

Estos ejes se desglosan en temas y conocimientos y habilidades, los cuales se abordan en los cinco bloques que comprenden cada grado escolar.

Por otra parte como los cambios educativos deben responder al avance continuo de la sociedad y a las necesidades de adaptación que exige, no deben limitarse a revisiones esporádicas de planes y programas de estudio, sino que esos cambios acelerados obliga a construir mecanismos graduales y permanentes que permitan evaluar y reformular los contenidos curriculares y las formas de gestión del sistema y de las escuelas en atención a una demanda cada día más diversa (SEP, 2006).

Como en la actualidad existe la preocupación por mejorar la calidad de la educación es que se realizan evaluaciones institucionales que dan cuenta de cómo está el sistema educativo, para realizar transformaciones



que incidan en lo curricular, en mejorar las condiciones para una práctica docente efectiva, las formas de gestión del sistema y de las escuelas, y para que los alumnos logren aprendizajes significativos.

En el Programa Nacional de Educación 2001-2006 se establecen lineamientos para lograr un mejoramiento de la calidad educativa que requiere, entre otras cosas, que hayan buenas evaluaciones para la mejora continua y la rendición de cuentas, y que se divulguen los resultados de las evaluaciones para la toma de decisiones. Estos procesos de evaluación son de utilidad para las autoridades pero también para los docentes porque les permite retroalimentar su práctica.

El objetivo de PISA es la evaluación de las competencias que los estudiantes necesitarán a lo largo de la vida, así como hacer llegar los resultados a diferentes audiencias para que incidan en la política educativa de los países participantes.

Para garantizar que los resultados sean comparables se evalúan poblaciones semejantes, por lo que el grupo objetivo es la población que se encuentra entre los 15 años 3 meses a 16 años 2 meses.

La competencia Matemática se define como la capacidad para identificar y comprender el papel que desempeñan las Matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, utilizar y relacionarse con las Matemáticas de forma que se puedan satisfacer sus necesidades vitales como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

Evalúa tres dimensiones del dominio: procesos, contenido y contexto o situación.

a) *Procesos*. Se refiere a las capacidades de los estudiantes que deben activarse para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos.

- *Reproducción*. Se refiere a realización de cálculos y problemas sencillos.
- *Conexión*. Considera la construcción de modelos, interpretación y solución de problemas estándar.
- *Reflexión*. Es la resolución de problemas complejos y la capacidad de generalización.

b) *Contenido*. Es un conjunto que engloba hechos y conceptos que adquieren sentido en un contexto o situación. Se consideran cuatro:

- *Cantidad*. Que implica el procedimiento y comprensión de los números en las diferentes maneras en que se presentan.
- *Espacio y forma*. Implica la comprensión del espacio y forma de los objetos del mundo.
- *Cambio y relaciones*. Capacidad para representar y reconocer cambios haciendo uso de funciones matemáticas.
- *Probabilidad*. Actividades y conceptos matemáticos importantes de esta área como son: la recolección de datos, el análisis y la presentación-visualización de los mismos, la probabilidad y la deducción.

c) *Contexto o situación*. Son los ámbitos en que se sitúan los problemas de Matemáticas. Las situaciones incluyen la vida personal, la vida escolar, en el trabajo y los deportes, en la comunidad local y en la sociedad.



- *Personales.* Relacionado con las actividades cotidianas de los alumnos.
- *Educativas o laborales.* Relacionadas a la escuela o al entorno laboral.
- *Pública.* En relación con la comunidad local u otra más amplia.
- *Científica.* Que es más abstracta.

Cuadro comparativo del plan y programas de estudio y PISA

ASPECTOS	PISA	PLAN DE ESTUDIOS, PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
Competencia	<i>Es un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos como motivación, valores y emociones indispensables para participar en diferentes contextos sociales.</i>	<i>Su manifestación revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en un contexto dado.</i>
Competencia matemática	<i>Es la capacidad para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados, utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer sus necesidades vitales como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.</i>	<i>Se trata de ir más allá de los aprendizajes esperados, y su desarrollo estriba en conducirse competentemente en la aplicación de las matemáticas o ser competente en matemáticas. Se proponen cuatro competencias: planteamiento y resolución de problemas, argumentación, comunicación y manejo de técnicas.</i>
Procesos	<i>Capacidades de los estudiantes que deben activarse para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos.</i>	<i>La metodología didáctica promueve que los alumnos en trabajo colaborativo recuperen los conocimientos previos, confronten entre ellos, reflexionen, analicen y discutan, para genere la construcción grupal de nuevos aprendizajes.</i>
Contenido	<i>Cada línea principal es un conjunto que engloba hechos y conceptos, los que cobran sentido en una amplia variedad de situaciones o contextos. Son cuatro líneas principales: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones y probabilidad.</i>	<i>Los contenidos están organizados en tres ejes temáticos: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida y manejo de la información. En cada grado hay cinco bloques y en cada uno de ellos hay temas y subtemas de los tres ejes.</i>
Contexto o situación	<i>Son los ámbitos en que se sitúan los problemas de Matemáticas. Las situaciones incluyen la vida personal, la vida escolar, en el trabajo y los deportes, en la comunidad local y en la sociedad. Se identifican cuatro tipos de contexto o situaciones: personal, educativa o personal, pública y científica.</i>	<i>La contextualización de los problemas tiene como propósito despertar el interés de los alumnos y que lo aprendido en el aula trascienda a las situaciones que se presenten en su vida. Se contextualizan en situaciones que se relacionen con su vida cotidiana. El interés de los alumnos.</i>



Enfoque	<i>Recabar información sobre el sistema educativo para incidir en las políticas educativas de los países participantes</i>	<i>Que el alumno tenga una formación matemática que le permita enfrentar y responder problemas de la vida moderna.</i>
Evaluación	<i>Evaluación de competencias que los jóvenes necesitarán a lo largo de su vida</i>	<i>Combina dos aspectos: Qué tanto saben hacer los alumnos y en qué medida lo aplican en estrecha relación con los contenidos y para lo cual se definen los aprendizajes esperados. Desarrollo de las competencias matemáticas para conducirse competentemente en su aplicación</i>

II. Secuencias didácticas

Sugerencias para el trabajo en el aula

El logro del aprendizaje significativo de los alumnos implica por parte del profesor la tarea de orientar y guiar en los procesos de estudio, por eso es importante que revise la metodología que está implícita en el programa de estudio y que han aplicado con éxito muchos docentes de las escuelas de la primera etapa de implementación del nuevo currículo de la reforma.

A partir de esta propuesta, tanto los alumnos como el maestro enfrentan nuevos retos que reclaman nuevas actitudes frente al conocimiento, se trata de que el maestro analice y proponga problemas interesantes, que permitan recuperar lo que ya saben y lo reestructuren para construir nuevos conocimientos.

El maestro plantea a los alumnos la actividad de estudio que van a realizar, resulta útil que la lean para ver si tienen claro lo que dice la consigna, así como fijar el tiempo para resolver el problema. Es conveniente que los alumnos trabajen en equipos de manera productiva y colaborativa, esto favorece su sentido de responsabilidad y la motivación para aprender.

En esta etapa los alumnos analizan, reflexionan y discuten en torno al problema planteado para buscar cómo resolverlo para lo cual recurren a sus conocimientos previos, los cuales les permiten *entrar* en la situación.

El maestro monitorea a los equipos para observar el proceso, su labor consiste en poder devolverles la responsabilidad de su aprendizaje, dejando de lado la creencia de que él valida las respuestas de los alumnos. Tiene que ser capaz de responder con una pregunta, al cuestionamiento que le hagan, con el propósito de ayudarlos a encontrar la respuesta que les ayude a apropiarse del conocimiento.

Una vez que se cumple con el tiempo marcado, se realiza la puesta en común donde un integrante de cada equipo explica la estrategia que utilizó argumentando su respuesta, el docente preguntará al grupo si algún equipo lo resolvió de otra manera o si tienen otro resultado, la solución



debe ser construida en el entendido de que existen diversas estrategias y hay que usar al menos una.

En el momento de la validación los alumnos tratan de convencer a los demás de la validez de las afirmaciones que hacen, no sólo de manera empírica sino con razonamientos matemáticos.

La institucionalización es el cierre de la actividad, donde el maestro tiene la responsabilidad exclusiva de que los alumnos asuman la significación socialmente establecida de un saber matemático que ha sido adquirido precariamente por los alumnos en la validación.

Con respecto a la evaluación

Es fundamental que se realice una evaluación constructiva que plantee que el aprendizaje del estudiante está en el núcleo del proceso de evaluación. Esto requiere una nueva forma de concebir los procesos de aprendizaje y enseñanza, por lo que es necesario introducir estrategias y procedimientos evaluativos muy diferente a los que han predominado. Por lo que requiere recoger vivencias y experiencias de procesos más que de resultados. Se debe buscar que sea el propio alumno quien asuma la responsabilidad de aprender.

Un instrumento útil para evaluar es la rúbrica, porque mide el nivel y la calidad de una tarea o actividad, en ella se hace una descripción de los criterios con los que se evalúa el trabajo (ver Anexos).

Secuencia didáctica para segundo grado

La secuencia didáctica que se propone se refiere a los conocimientos y habilidades de segundo grado que están incluidos en el Programa 2006 de Matemáticas en el eje manejo de la información y el tema representación de la información.

Contenido: Probabilidad

Contexto: Personal

Proceso: Reproducción, conexión y reflexión

Sesiones: Dos

Propósito: Que los alumnos analicen e interpreten información contenida en gráficas poligonales y reflexionen sobre el significado y propiedades de la media, mediana y moda de un conjunto de datos.

Aprendizajes esperados:

Interpretar y comunicar información mediante polígonos de frecuencia.

Interpretar y calcular las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados, considerando de manera especial las propiedades de la media aritmética.

Habilidades que se van a desarrollar: Resolución de problemas, argumentación, comunicación y manejo de técnicas.



Sesión 1

¿Quién tiene la razón?

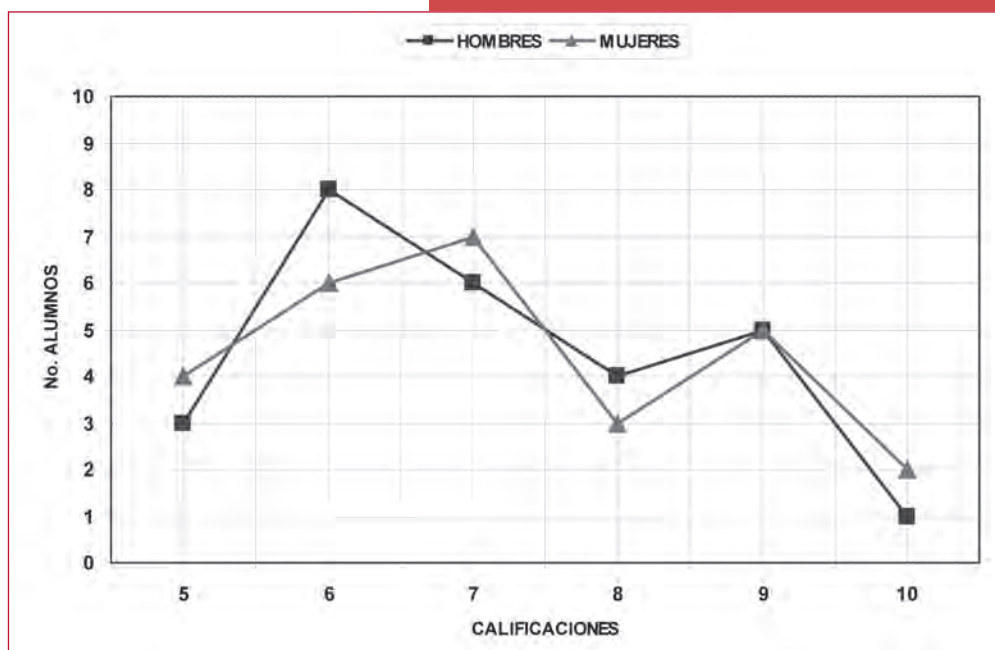
Intenciones didácticas: Que los alumnos analicen, comparen e interpreten la información contenida en gráficas poligonales.

Consigna: Reunidos en equipos analicen la siguiente situación:

Los alumnos de un grupo no estuvieron de acuerdo con la opinión de su maestro de Español cuando les dijo que las alumnas habían tenido mejor desempeño que ellos, por lo que decidieron analizar las gráficas con las calificaciones que obtuvieron y que publicaron en el departamento escolar, con ese motivo propusieron a su maestro de Matemáticas que analizaran la gráfica en la clase.



Consigna: Reunidos en equipos, analicen la siguiente gráfica que muestra las calificaciones de los alumnos y las alumnas de un grupo de secundaria, para que puedan contestar las preguntas:



- ¿Cuál es la calificación de las alumnas que más se repite?
- ¿Quiénes reprobaron más, los hombres o las mujeres?
- ¿Cuántos alumnos y cuántas alumnas hay en el grupo?
- ¿Cuántos alumnos y cuántas mujeres obtuvieron más de 7?
- ¿Cuál grupo tuvo mejor desempeño?

Sugerencias

Es importante que en la puesta en común se analicen las respuestas y qué hicieron para encontrarlas, en especial cómo decidieron cuál grupo tuvo mejor desempeño.

También es importante comentar la ventaja de comparar dos funciones en la misma gráfica pues permite visualizar rápidamente su comportamiento.

Para consolidar lo aprendido los alumnos pueden traer para la próxima clase gráficas que aparezcan en periódicos, revistas o carteles, con el propósito de analizarlas e interpretarlas y también discutir acerca de la explicación que la acompaña, en caso de que la tenga, además se promueve que los aprendizajes trasciendan a la vida cotidiana.

Sesión 2

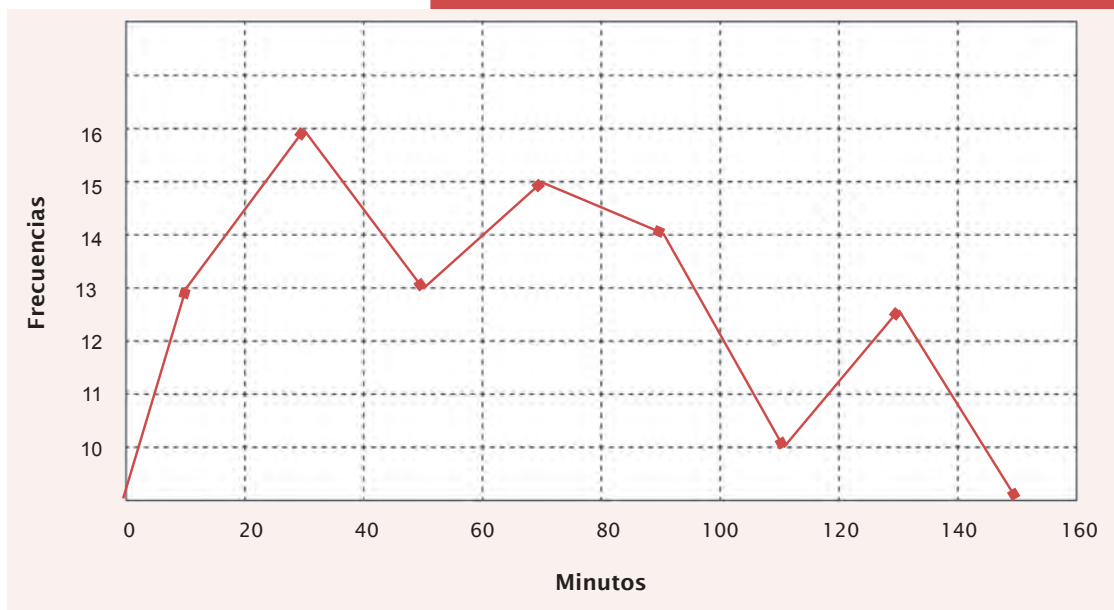
Fabricando tu salud

Intenciones didácticas: Que los alumnos calculen las medidas de tendencia central a partir de datos agrupados expresados en una gráfica y que analicen las propiedades de las medidas de tendencia central

Consigna: Reunidos en equipos, resuelvan el siguiente problema:

Se realizó una entrevista a los trabajadores de una fábrica para conocer el tiempo diario que destinan al ejercicio con el propósito de realizar una investigación para conocer si su estilo de vida tiene relación con su salud, la información se registró de la siguiente manera:





Analicen la información de la gráfica y contesten las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el promedio de minutos destinado al ejercicio?
- ¿Cuál es la edad que corresponde a la mediana del tiempo?
- ¿Qué medida representa el grupo de 20 a 40 minutos en la gráfica?

Sugerencias

Debe tomarse en cuenta que los datos están agrupados en intervalos, lo cual significa que para calcular la media del tiempo en minutos, debe usarse la marca de clase de cada intervalo, que es el punto medio del intervalo correspondiente y la frecuencia del intervalo (número de personas), para las otras medidas del centro también se utilizan las marcas de clase.

Secuencia didáctica para tercer grado

Esta secuencia aborda contenidos del Programa 2006 de Matemáticas de tercer grado, para el eje de manejo de la información y el tema de representación de la información.



Contenido: Probabilidad

Contexto: Personal

Proceso: Reproducción, conexión y reflexión

Sesiones: Tres

Propósito: Que los alumnos diseñen y lleven a cabo un estudio estadístico, desde la planificación del proceso hasta la presentación de los resultados, que interpreten gráficas poligonales y diagramas de caja-brazos para deducir inferencias.

Aprendizajes esperados:

- Diseñar un estudio o experimento a partir de datos obtenidos de diversas fuentes y elijan la forma de organización y representación tubular o gráfica más adecuada para mostrar la información.
- Interpretar la información que se presenta en una gráfica para que construyan inferencias.
- Describir información que contiene una gráfica del tipo caja-brazos.

Habilidades que se van a desarrollar: Resolución de problemas, argumentación, comunicación y manejo de técnicas.

Sesión 1

¿Cuál es tu favorito?

Intenciones didácticas: Que los alumnos diseñen y lleven a cabo un estudio estadístico, desde la planificación del proceso hasta la presentación de los resultados.

Consigna: Reunidos en equipos, lean la siguiente situación para resolverla:

En una escuela surgió una inquietud porque no lograban ponerse de acuerdo en cuál era el equipo de fútbol que tiene más seguidores, por lo que decidieron consultar a su maestro de Matemáticas quien los orientó proponiéndoles lo siguiente:



Organizados en equipos, planifiquen y lleven a cabo las actividades necesarias para contestar la siguiente pregunta: ¿Cuál es el equipo de fútbol favorito de los alumnos de esta escuela? Representen la información y formulen sus conclusiones a partir de ella, por ejemplo, con respecto al equipo favorito, que equipos hay con menos afición y/o si hay empate en la preferencia por algunos de ellos.

Sugerencias

El plantearle a los alumnos sólo una pregunta es con la intención de que ellos realicen una investigación y que recurran a sus conocimientos previos para *entrar* en la situación; en la primera sesión los alumnos reunidos en equipos tienen que decidir qué, cómo y cuándo van a obtener la información y la forma en que la van a registrar, el trabajo no se va a completar en la siguiente sesión, sino que requiere de más tiempo. Cuando se realice la puesta en común los alumnos explican las estrategias que emplearon y los resultados que obtuvieron, resaltando si la información la recabaron a partir de una muestra o de toda la población y analizarán la pertinencia de utilizar uno u otro procedimiento y también por qué eligieron determinada forma de representarla. Puede ser que algún equipo al observar que dos o tres equipos tuvieron pocos seguidores opten por reunirlos en una categoría. Si algunos equipos se decidieron por utilizar una muestra, se pueden realizar preguntas como la siguiente: si 25 % de la muestra le va a un determinado equipo, ¿cuántos alumnos de la escuela es probable que le vayan también a ese equipo?

Si prefieren otra temática pueden realizar investigaciones sobre algo que les interese conocer, también pueden realizar otras para consolidar lo aprendido.

Sesión 2

Analizando gráficas

Intención didáctica: Que los alumnos realicen inferencias a partir de la información que se representa en una gráfica.

Consigna: Reunidos en equipos, lean el planteamiento siguiente:

Los alumnos de la escuela quedaron tan motivados con la investigación que realizaron que decidieron realizar otra acerca de la cantidad de refrescos que se venden en la cooperativa escolar a partir de las 9 de la mañana hasta las 4 de la tarde, para lo cual el maestro les entrega a los alumnos una gráfica con la información detallada.

Con base en esa información, reunidos en equipos analicen la gráfica e interpreten lo que pudo haber ocurrido.



Sugerencias

Los alumnos analizarán la gráfica y reflexionarán acerca de lo que pudo haber ocurrido, es conveniente que discutan con los miembros del equipo acerca de las variaciones que hay y qué pudo haberlas ocasionado, en la puesta en común hay que estar atentos a la argumentación que sustenta los resultados que obtuvieron y ver quién tiene la razón.

Para consolidar lo aprendido se pueden analizar también otras gráficas donde se comparen dos o más poligonales o gráficas con datos agrupados.

Sesión 3

¿Cuál te gustó más?

Intención didáctica: Que los alumnos describan la información de los datos que están representados en una gráfica caja-brazos.

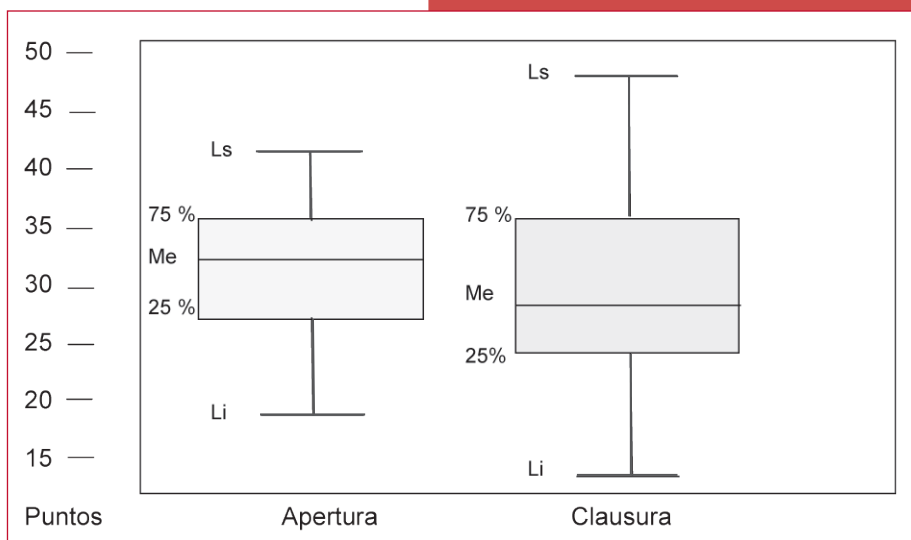
Consigna: Reunidos en equipos, lean la actividad e interpreten la gráfica:

El maestro del grupo les lanzó un reto, diciéndoles lo siguiente *yo sé que diseñar, representar e interpretar la información ya no presenta ninguna dificultad para ustedes voy a proponerles que interpreten la siguiente gráfica y vamos a discutir las conclusiones que saquen a partir de su análisis.*



Las puntuaciones de los equipos de los torneos de apertura y de clausura de fútbol de primera división se pueden comparar con un diagrama caja-brazos, como se muestra a continuación.





Con base en la interpretación de las gráficas, analicen con sus compañeros para que puedan obtener conclusiones acerca del desempeño de los equipos en las dos temporadas.

Sugerencias

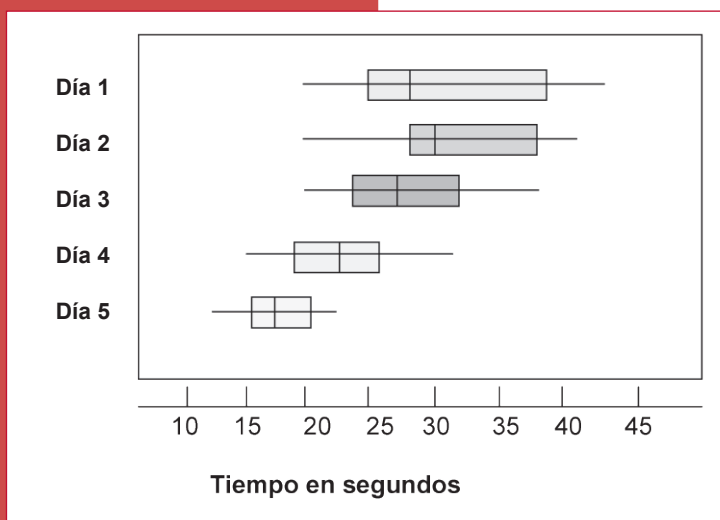
Es probable que los alumnos usen la intuición para interpretar la gráfica pues es la primera vez que la ven y aunque en grados anteriores ya estudiaron las medidas de tendencia central en esta gráfica-brazos se abordan integralmente, resaltando los cinco valores importantes de un conjunto de datos: el valor mínimo que es límite inferior (Li), 25%, la mediana (Me), 75% y el valor máximo que es el límite superior (Ls) de los datos.

Siempre es importante el monitoreo entre los equipos para apoyarlos en sus reflexiones, como por ejemplo ¿por qué es un diagrama de caja-brazos? Sugiriendo que traten de visualizarla.

En la puesta en común es necesario que analicen la utilidad que tiene el diagrama caja-brazos para comparar conjuntos de datos. Para consolidar lo aprendido se pueden presentar otras gráficas como la siguiente para que la interpreten o invitar a los alumnos a que elaboren otras gráficas.

Reunidos en parejas, resuelvan el siguiente problema: un atleta entrena para una carrera y toma los tiempos que necesita para recorrer los 100 metros durante 10 días consecutivos (cada día se toman varios tiempos y se promedian para calcular la mediana, cuartiles, valores mínimo y máximo).





A partir del análisis de la gráfica pueden decir ¿qué es lo que sucedió con el desempeño de este atleta?

III. Recomendaciones para el trabajo con otros docentes

Un cambio en el currículo es sólo un punto de partida para la transformación de la organización de la vida escolar, implica un cambio en su dinámica: el docente tendrá que promover la convivencia y el aprendizajes en ambientes colegiados, colaborativos y desafiantes, en una palabra, crear una comunidad de aprendizaje en donde todos seamos corresponsables del éxito educativo de todos los alumnos

El trabajo colegiado se transforma en un espacio necesario para compartir experiencias centradas en procesos de enseñanza aprendizaje. Los docentes requieren intercambiar información e ideas para buscar soluciones a las dificultades que se presentan, ya sea hacia el interior de las academias específicas y/o acordar con maestros de otras asignaturas, o solicitar ayuda y apoyo para el logro de metas comunes y así construir nuevos aprendizajes a través de un proceso colaborativo con sus pares.

Algunas temáticas que se pueden abordar son:

- a) El rol del maestro, ya que la aplicación de la metodología didáctica inmersa en el plan de estudios implica que tanto los alumnos como los maestros se enfrenten a nuevos retos que reclaman actitudes distintas frente al conocimiento y a ideas diferentes sobre los que significa enseñar y aprender.
- b) La planificación, puesto que es la tarea que garantiza que el proceso de enseñanza, estudio y aprendizaje sea eficiente, estos espacios pueden ser aprovechados para revisar el tipo de actividades matemáticas que se le va a proponer a los alumnos para analizar si propician la recuperación de sus conocimientos previos y promueven la actividad mental para construir nuevos conocimiento.

- c) El análisis de estrategias de evaluación, para transitar hacia la evaluación constructiva que proporciona información al docente para enseñar de manera más efectiva y a los alumnos acerca de lo que han aprendido, lo que aún les falta por aprender y la mejor manera de aprenderlo.
- d) El trabajo en equipo, que conlleva a la búsqueda de acuerdos y argumentos para validar resultados y procedimientos, así como escuchar las ideas de los demás y modificar las propias.
- e) El manejo didáctico de las tecnologías de la informática y la comunicación, tomando en cuenta que uno de los objetivos básicos de la educación es la preparación de los alumnos para ser ciudadanos de una sociedad plural, democrática y tecnológicamente avanzada.
- f) La elaboración de proyectos compartidos entre maestros de diferentes asignaturas, para definir explícitamente las relaciones entre las asignaturas que conforman la propuesta curricular, lo que incrementa las oportunidades para integrar los conocimientos, las habilidades y los valores de las distintas áreas de aprendizaje

IV. Recomendaciones para el trabajo con la familia

El trabajo que se desarrolla en la escuela puede trascender las paredes escolares, puesto que la explicitación de los aprendizajes que se espera que logren los alumnos durante el ciclo escolar permitirá tanto a los maestros como a los alumnos y a sus pares conocer hacia donde deben dirigir sus esfuerzos, una adecuada relación escuela-comunidad favorece el intercambio de experiencias y el vínculo entre estudiantes, y aporta un mayor sentido al aprendizaje.

Los padres de familia pueden ser una influencia positiva para ayudar a sus hijos a aprender Matemáticas, pero también pueden generar una actitud adversa con comentarios como los siguientes: *las matemáticas son difíciles, yo no las utilizo en mi vida diaria, cuando estudié nunca me gustaron.*

Se puede pensar que cada uno de nosotros podemos vivir sin necesidad de Matemáticas o, por lo menos, sin muchas de las Matemáticas que se estudian en la educación básica... “pero esta creencia sólo se da porque, de hecho, no vivimos solos sino en sociedad: en una sociedad que funciona a base de Matemáticas y en la que hay gente capaz de hacer de matemático para cubrir las necesidades de los demás, incluso cuando éstos no reconocen sus propias necesidades matemáticas”.¹¹

Por otra parte, investigaciones científicas indican que los alumnos que más aprenden son aquellos cuyos padres apoyan de forma activa en el aprendizaje de sus hijos, por lo que hacer de las Matemáticas parte de la vida diaria, es una de las mejores formas de propiciar el aprendizaje y que tengan una actitud positiva hacia las mismas.

Sin embargo, no podemos abordar el tema de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas sin preguntarnos qué son, en qué consisten y

¹¹ Y. Chevallard, et al. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Biblioteca del Normalista, primera edición SEP-Cooperación Española, España. pp. 13-47.



para qué sirven. Ahora bien, estas preguntas no pueden referirse únicamente a las Matemáticas de la escuela, tienen que abarcar todas las Matemáticas que existen en nuestra sociedad.

Además de los conocimientos y habilidades matemáticas (contenidos), los jóvenes *deben aprender a resolver problemas aplicando su conocimiento de Matemáticas a nuevas situaciones, deben aprender a verse a sí mismos como matemáticos, capaces de razonar matemáticamente y de comunicar ideas matemáticas al hablar y escribir sobre ideas matemáticas.*¹²

Entonces, hay que comprender el enfoque de la asignatura que promueve el desarrollo de las competencias matemáticas planteadas en el programa de Matemáticas de secundaria (aprender a resolver problemas, comunicación, argumentación y manejo de técnicas), que se logran con la metodología didáctica que está inmersa en el programa.

Es tarea fundamental que los padres de familia participen para que ayuden a estudiar a los niños, puesto que el mundo laboral y vida cotidiana tan cambiante exigen de competencias cada vez más desarrolladas.

Pero entonces, ¿qué significa cuando en la escuela se habla de competencia? De manera general, el desarrollo de competencias se analiza en dos dimensiones: una en la que se espera la contribución de todas las asignaturas que conforman el plan de estudios (competencias para la vida) y otra que se circunscribe a cada disciplina.

Ante esta demanda *es necesaria una educación básica que contribuya al desarrollo de competencias amplias para mejorar la manera de vivir y convivir en una sociedad cada vez más compleja. Esto exige considerar el papel de la adquisición de los saberes socialmente construidos, la movilización de saberes culturales y la capacidad de aprender permanentemente para hacer frente a la creciente producción de conocimiento y aprovecharlo en la vida cotidiana* (SEP, 2006).

Por eso, además de evaluar qué tanto saben hacer los estudiantes y en qué medida aplican lo que saben en referencia a los contenidos matemáticos que se estudian, se propone en el programa de estudio de Matemáticas, el desarrollo de Competencias matemáticas que contribuyan al logro del perfil de egreso de educación básica.

Los padres de familia pueden ayudar a sus hijos a desarrollar estas competencias involucrándolos en los problemas cotidianos que requieren el uso de las Matemáticas, como por ejemplo, en la casa, al realizar compras, planear las vacaciones, calcular distancias o interpretación de gráficas.

También pueden pedirles que expliquen cómo resolverían el problema, cómo llegaron a la respuesta o si encontraron otro procedimiento para resolverlo, de ser así, cuál les pareció más eficiente.

Las respuestas incorrectas también son útiles ya que aunque en la vida diaria nos encontramos frecuentemente con errores y éstos no se toman como un fracaso sino como un reto, en la escuela sucede lo contrario provocando angustia y estrés.

¹²U.S. Department of Education (2005). *Cómo ayudar a sus hijos con las matemáticas*. p.3. Disponible en: <http://www.ed.gov/espanol/parents/academia/matematicas/matematicas.pdf>



Por el contrario, muchos de los errores cometidos en situaciones didácticas son considerados como momentos creativos, fuera de una norma que aún no ha sido interiorizada *si no se aceptara este riesgo, se dejaría a los niños al abrigo de imprevistos, sometidos a la repetición de actividades, pero sin posibilidades de progresar*.¹³

Cuando crean necesario pueden solicitar una entrevista con el maestro para solucionar problemas concretos, como cambio de conducta de su hijo o si baja su rendimiento; por otra parte, los hijos valoran que sus padres se involucren en actividades escolares.

Puesto que el propósito de ambos es el mismo, lograr el éxito de los alumnos, es conveniente no devaluar el trabajo del profesor delante de sus hijos, si tiene quejas discútalalo directamente con él.

En síntesis, es esencial la participación de los padres de familia en la formación de sus hijos, no debe dejarse únicamente a la escuela, ya que el desarrollo de las competencias necesarias para que se integren a la vida como ciudadanos críticos, reflexivos y democráticos es responsabilidad compartida.

V. Recomendaciones sobre artículos o lecturas para los docentes

- Airasian, P. (2002). *La evaluación en el salón de clases*. SEP/Mc Graw Hill. México. (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Artigue, M. (1995), Ingeniería didáctica. En: *Ingeniería didáctica en educación matemática*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Astolfi, P. (2004). *El error, un medio para enseñar*. Díada/SEP. México. (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Ausubel, D. (1968), *Educational Psychology: A Cognitive View*. Nueva York: Holt, Rinehart and Winston.
- Balbuena, H. (2006). *El desarrollo de competencias matemáticas*. Matemáticas. Antología. SEP: México.
- Batanero, M. et al. (1996) *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Batanero, M. (2000) Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Revista Uno*. 25.
- Bazarra, L. et al. (2005). *Ser profesor y dirigir profesores en tiempos de cambio*. Madrid: Narea.
- Block, D. (2001). Notas sobre el papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. *Matemáticas*. México: Cinvestav.
- Brousseau, G. (2000), Educación y didáctica de las matemáticas. En: *Educación Matemática*. 12 (1).
- Brousseau. G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En: *Didáctica de la matemática*. Buenos Aires: Paidós.
- Cano, E. (2005). *Cómo mejorar las competencias de los docentes. Guía para la autoevaluación y el desarrollo de las competencias del profesorado*. Barcelona: Editorial.

¹³Jean Pierre Astolfi, "El error, un medio para enseñar", Biblioteca para la Actualización del Maestro, SEP, México, 2004, pp. 7-25.



- Casanova, A. (1998). La evaluación básica. En: *La evaluación educativa. Escuela básica*. México: Muralla/SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Cázares, L. et al. (2007). *Planeación y evaluación basadas en competencias. Fundamentos y prácticas para el desarrollo de competencias docentes, desde preescolar hasta posgrado*. México: Trillas.
- Clarck, D. (2002). *Evaluación constructiva en matemáticas. Pasos prácticos para profesores*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson.
- Chevallard, Y. et al. (2004). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: SEP. (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Díaz, J. et al. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Gardner, H. (1997). *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar en las escuelas*. México: Paidós/SEP (Biblioteca para la actualización del maestro).
- Gómez, M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. México: Narcea.
- Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Grupo Beta. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis.
- Hargreaves, A. et al. (2001). *Una educación para el cambio. Reinventar la educación de los adolescentes*. México: Octaedro.
- Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*. México: Prentice Hall.
- Ilfrah, G. (2000). *Historia universal de las cifras. Edición especial para bibliotecas de las escuelas Normales y Centros de Maestros*. México: SEP.
- Kaluga, L. et al. (2004). *Aprendizaje acelerado. Estrategias para la potenciación del aprendizaje*. México: Grupo Editorial Tomo.
- Mc Farlane, A. (2003). El valor de la educación y el papel de las tecnologías de la información y la comunicación. En: *El aprendizaje y las tecnologías de la información*. México: Aguilar/Altea/Taurus/Alfaguara/SEP. (Biblioteca de actualización para el maestro).
- Morín, E. (1999). *Los siete saberes en la educación del futuro*. Francia. UNESCO.
- Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. México: SEP. (Biblioteca para la actualización del Maestro).
- Parra, C. y Sáiz, I. (2002, Comps.) *Didácticas de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias de México. *Revista Iberoamericana de Educación*. (33). (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura).
- Trigueros, M. et al. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*. 12 (2).



SEP (2006). *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006*. México: SEP.

SEP (2006). *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Programas de Estudio 2006*. México: SEP.

SEP (2006). *Reforma de la Educación Secundaria. Fundamentación Curricular. Matemáticas*. México: SEP.



ANEXOS

Rúbrica con indicadores para evaluar la solución de problemas

Indicadores de desempeño (Tarea vinculada con solución de problemas abiertos: comprensión del problema y solución)	Criterio Cualitativo	Criterio Cuantitativo
Demuestra total comprensión del problema. Todos los requerimientos de la tarea están incluidos en la respuesta y la o las soluciones son pertinentes y originales.	excepcional	5
Demuestra considerable comprensión del problema. Todos los requerimientos de la tarea están incluidos en la respuesta, la o las soluciones ofrecidas son correctas.	admirable	4
Demuestra comprensión parcial del problema. La mayor cantidad de requerimientos de la tarea están comprendidos en la respuesta. Ofrece al menos una solución apropiada y correcta al problema planteado.	aceptable	3
Demuestra poca comprensión del problema. Muchos de los requerimientos de la tarea faltan en la respuesta. Las soluciones que intenta son parciales o sesgadas.	amateur	2
No comprende el problema, no resuelve la tarea. Aunque hace intentos, no logra enfocar el problema ni ofrecer soluciones.	incipiente	1

Comentarios del docente a los alumnos respecto a los indicadores de desempeño con sugerencias para mejorar en cada caso y estrategias para superar las deficiencias encontradas:



Rúbrica sobre la actividad colaborativa (autoevaluación personal)

Nombre _____ Fecha _____

	INCIPIENTE 1	EN DESARROLLO 2	MADURO 3	EJEMPLAR 4	Puntaje
CONTRIBUIR					
Investigación e información adicional	No recabé información relacionada con el tema	Recabé muy poca información vinculada con el tema	Compilé información básica sobre el tema	Recolecté gran cantidad de información pertinente a la temática	
Información compartida	No compartí información con los compañeros de equipo	Compartí muy poca información, alguna relacionada con el tema	Compartí información fundamental, mayormente relacionada con la temática	Compartí una gran cantidad de información, toda ella vinculada con el tema	
Puntualidad	No cumplí con las tareas y actividades asignadas	Fui informal en la mayoría de las tareas y actividades asignadas	Fui puntual en la mayoría de las tareas asignadas	Cumplí con todas mis asignaciones puntualmente	
ASUMIR RESPONSABILIDADES					
Cumplimiento de las tareas encargadas	No cumplí con ninguno de los deberes del rol que me correspondía	Cumplí con muy pocos de los deberes de mi rol	Realicé casi todas las tareas propias de mi rol	Cumplí plenamente con los deberes asociados a mi rol	
Participación en las sesiones de trabajo de equipo	No aporté/ interactué durante las sesiones	Expuse o aporté poca información, más bien irrelevante para el tema	Presenté bastante información, casi toda relacionada con la temática	Expuse o aporté una gran cantidad de información, toda ella pertinente	
Compromiso con el trabajo	Siempre esperé que otros se hicieran cargo del trabajo	Raramente hice el trabajo encomendado, necesitaba recordatorios o llamadas de atención	Usualmente realicé el trabajo que me correspondía, casi nunca requerí recordatorios	Siempre hice el trabajo encomendado sin necesidad de que me lo recordaran	

Traducido de:
<http://edweb.sdsu.edu/triton/tidepoolunit/Rubrics/collrubric.html>



	INCIPIENTE 1	EN DESARROLLO 2	MADURO 3	EJEMPLAR 4	Puntaje
VALORAR LOS PUNTOS DE VISTA AJENOS					
Escucha a los compañeros de equipo	Estuve siempre acaparando la conversación y no permití que los demás se expresaran	Generalmente intervine y raramente permití que los otros expresaran sus puntos de vista	Tomé en cuenta las aportaciones de los otros, pero a veces intervine demasiado	Tomé en cuenta a los demás y participé de manera razonable	
Coopera con los compañeros del equipo	Frecuentemente discutí con los compañeros	A veces entré en controversias innecesarias	Raramente polemiqué sin necesidad	Nunca discutí de modo impertinente	
Toma de decisiones	Generalmente deseaba que las cosas se hicieran a mi manera	A menudo me aliné con mis amigos sin considerar desapasionadamente todas las opciones	Usualmente consideré todos los puntos de vista	Siempre ayudé al equipo para que se tomaran decisiones razonables	
				Total	

Rúbrica para el trabajo de aprendizaje cooperativo

Rúbrica A: Proceso de trabajo (Evaluación por equipo)

Nombre del equipo/Integrantes: _____ Fecha: _____

	Excepcional	Excelente	Aceptable	Inexperta
Participación en el equipo	Todos los estudiantes participaron con entusiasmo	Al menos 3/4 partes de los estudiantes participaron activamente	Al menos la mitad de los estudiantes aportaron ideas	Sólo una o dos personas participaron activamente
Responsabilidad compartida	La responsabilidad de la tarea fue siempre compartida	La responsabilidad fue compartida por la mayoría de los miembros	La responsabilidad se compartió entre la mitad de los participantes	Dependencia exclusiva en una persona
Calidad de la Interacción	Se exhibieron excelentes habilidades para escuchar y liderar; los estudiantes reflejaron interés por las opiniones de los demás durante las discusiones	Los alumnos mostraron idoneidad para la interacción; discutieron animadamente centrados en la tarea	Algunas habilidades para la interacción; escucha atenta; algunas evidencias de discusión o de búsqueda de alternativas.	Poca interacción; conversaciones breves; algunos estudiantes se muestran desinteresados o distraídos

Adaptado de: 2007 Pearson Education Inc, Pearson Education Prentice Hall. Aprendizaje cooperativo
http://www.phschool.com/professional_development/assessment/rub_coop_product.html



	Excepcional	Excelente	Aceptable	Inexperta
Roles dentro del grupo	Cada alumno tiene asignado un rol claramente definido; los miembros del equipo desempeñan sus roles eficientemente	Cada alumno tiene un rol asignado, pero los roles no están claramente definidos o los alumnos no se adhieren consistentemente a ellos	Los estudiantes tienen roles asignados pero los respetan escasamente	No se hacen esfuerzos por asignar roles a los alumnos.

Rúbrica B: Resultado o producto elaborado por el equipo

Nombre del equipo/Integrantes: _____ Fecha: _____

	Excepcional	Excelente	Aceptable	Inexperta
Organización	Extremadamente bien ordenado; un esquema lógico que es fácil de entender; se fluye apropiadamente de una idea a otra; la organización incrementa la efectividad del producto	Hay signos positivos de organización y la mayoría de las transiciones son sencillas y fluidas, aunque algunas ideas resultan poco claras	Cierta organización; las ideas no son presentadas de manera coherente y las transiciones no siempre resultan accesibles, lo que a veces distrae a la audiencia	Organización fragmentada y confusa; formato difícil de seguir; transiciones abruptas que distraen seriamente a la audiencia
Claridad en el contenido	Totalmente preciso: todos los hechos se explicitan claramente	Mayoritariamente preciso; se presentan unas pocas inconsistencias o errores informativos	Alguna claridad; diversas inconsistencias o errores en el manejo de la información	Completamente confuso; los datos del trabajo fueron mal comunicados
Investigación	Los alumnos trascendieron las expectativas depositadas en ellos; consiguieron material adicional relevante; incorporaron significativamente ideas personales al trabajo y utilizaron múltiples recursos para mejorar su proyecto	El equipo hizo una muy buena labor de investigación; aprovecharon los materiales provistos en todo su potencial; emplearon diversos recursos investigativos para optimizar su proyecto; eventualmente tomaron la iniciativa para buscar información adicional	Usaron el material que les fue entregado de manera aceptable, pero no consultaron fuentes adicionales	No utilizaron los recursos iniciales efectivamente; hicieron mínimas aportaciones originales al trabajo
Creatividad	El producto resultó muy ingenioso y presentado con originalidad; una aproximación singular que realmente le dio realce al proyecto	Producto parcialmente creativo; bien pensado y expuesto de manera novedosa	El producto exhibe algunos toques de originalidad, pero de manera irregular	Poca energía creativa; el proyecto resultó insulso y falto de aporte.



	Excepcional	Excelente	Aceptable	Inexperta
Mecánica de presentación	La exposición o puesta en común fue muy provocativa y capturó el interés de la audiencia todo el tiempo	Bastante buena presentación, interesante para toda la audiencia; se hizo de modo original y bien organizada	Exposición clara y precisa aunque sólo parcialmente interesante; ingeniosa por momentos y organizada de manera lógica	La presentación no fue organizada apropiadamente; resultó difícil de entender y no mantuvo el interés de la audiencia



Anexos





ANEXO I.

Análisis de unidades de reactivos

En esta sección se presenta el análisis pedagógico de dos unidades de reactivos de Matemáticas liberadas por PISA, realizado por los especialistas que participaron en la elaboración de las propuestas incluidas en esta obra.

Las unidades analizadas y los especialistas encargados de esta labor fueron:

Unidades de reactivos analizadas	Especialista
<i>El carpintero</i>	<i>Teresa Fonseca Cárdenas</i>
<i>Pasos</i>	<i>Rosario Licea García</i>
<i>Exportaciones</i>	<i>Eduardo Mancera Martínez</i>

El análisis presentado incluye una exploración de las características del estímulo y reactivos de cada unidad a partir de su relación con el programa de estudios de Matemáticas de nivel secundaria y su relevancia y pertinencia para estudiantes de este nivel.



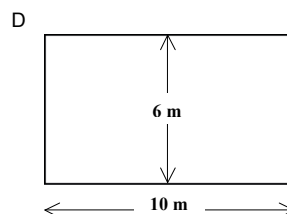
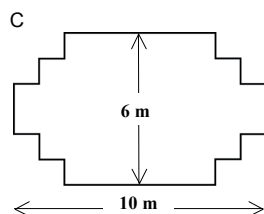
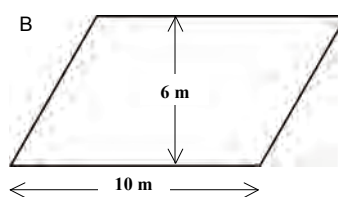
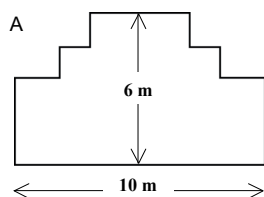
EL CARPINTERO

PREGUNTA 1: El Carpintero

M266Q01

Un carpintero tiene la madera necesaria para hacer una cerca de 32 metros de largo y quiere colocarla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para ese jardín.

Encierra en un círculo *Si* o *No* para cada diseño, dependiendo si se puede realizar con la cerca de 32 metros.



Pregunta 1: El Carpintero

M266Q01

Diseño del jardín	Usando este diseño, ¿se puede realizar con 32 metros de cerca?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Clasificación

Procesos: *Conexiones*

Contenido o Subescala: *Espacio y forma*

Contexto o Situación: *Educativa*

Nivel: *6 (687 puntos)*

Criterios de Calificación

1 Punto: Cuatro respuestas correctas

Diseño A Sí

Diseño B No

Diseño C	Sí
Diseño D	Sí

O Puntos: Tres o menos correctas

Análisis de la unidad de reactivos

El estímulo del que se desprende el reactivo tiene un enunciado breve seguido de cuatro figuras que representan las cercas que se quieren colocar alrededor de jardines con diferentes diseños utilizando una cantidad determinada de madera.

Los gráficos se identifican con el título de *El carpintero* donde aparecen las figuras con líneas que indican las dimensiones para el diseño de cada jardín, los que se definen con los incisos a, b, c y d.

Con relación al contenido, las figuras representan varios diseños del jardín que se quiere cercar, de acuerdo con PISA el contenido corresponde a Espacio y forma.

Los alumnos tienen que ser capaces de buscar semejanzas y diferencias a partir del análisis y reconocimiento de las formas en las representaciones dadas en el estímulo, la capacidad del alumno para determinar por qué una de las figuras no cumple con la condición de que con esa madera se construya la cerca del jardín, requiere que el estudiante genere ideas para que comprenda el problema, realice cálculos y busque estrategias para resolverlo.

Se identifican habilidades de pensamiento matemático en un contexto educativo o laboral a partir de las preguntas que se hace el alumno cuando analiza el problema y reflexiona acerca de qué es lo que tiene que hacer y cómo lo va a realizar para encontrar cuál es la solución.

Las opciones de respuesta se relacionan con la capacidad de que el alumno comprenda cómo se relacionan las variables con la pregunta, que desde la perspectiva de PISA corresponde al proceso de conexión.

Esta unidad concierne al proceso de conexión pues requiere que se reúnan ideas y procedimientos matemáticos para resolver el problema, además de realizar cálculos. El establecimiento de conexiones requiere que los alumnos sean capaces de distinguir y relacionar diferentes definiciones, afirmaciones y ejemplos.

La pregunta requiere que el alumno relacione ideas matemáticas de diversos contenidos, para comprender si las dimensiones que están en las representaciones son suficientes para determinar el perímetro de las figuras representadas.

Las opciones de respuesta están en una tabla con una columna para el diseño del jardín y otra para definir si usando determinado diseño se puede o no realizar la cerca con los metros de madera de que se dispone.

El proceso para llegar a la respuesta correcta consiste en reflexionar acerca de en qué caso la madera no alcanza para construir la cerca, con las dimensiones marcadas.

El nivel de desempeño que requiere esta pregunta es 6, el nivel más alto porque el alumno debe razonar, comprender y reflexionar para generalizar hallazgos; el promedio nacional del nivel de desempeño fue sólo del 6 y 20% de la OCDE.

Esto puede deberse a que los alumnos probablemente no reflexionaron en torno a que la solución no consiste en calcular el área de las figuras, ya que el perímetro y el área son dos magnitudes distintas que dependen de la forma del polígono.



Unidad: Pasos



La foto muestra las huellas del caminar de un hombre. El tamaño de cada paso P es la distancia entre los talones de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$, nos da una relación aproximada entre n y P donde,
 n = número de pasos por minuto y
 P = el tamaño del paso en metros.

Pregunta 1: Pasos

M124Q01

Si aplicamos la fórmula a Héctor que da 70 pasos por minuto, ¿cuál es el tamaño de los pasos de Héctor? Muestra tus operaciones.

Clasificación

Procesos: *Reproducción*

Contenido o Subescala: *Cambio y relaciones*

Contexto o Situación: *Personal*

Nivel: 5 (611 puntos)

Criterios de Calificación

2 Puntos: 0.5 m o 50 cm, $\frac{1}{2}$ (no se requiere unidad).

- $70/p = 140$
- $70 = 140 p$
- $p = 0.5$
- $70/140$

1 Punto: Se da una sustitución correcta de los números en la fórmula, pero da respuesta incorrecta o sin respuesta.

$\frac{70}{p} = 140$ [sólo sustituye los números en la fórmula].

$\frac{70}{p} = 140 p$

$p = 2$ [sustitución correcta, pero desarrollo incorrecto].

O bien:

Hay manipulación correcta de la fórmula hasta $P=n/140$, pero sin desarrollo correcto posterior.

0 Puntos: Otras respuestas.

70 cm

Pregunta 2: Pasos

Bernardo sabe que el tamaño de su paso es de 0.80 metros. La fórmula se ajusta al caminado de Bernardo.

Calcula la velocidad a la que camina Bernardo en metros por minuto y kilómetros por hora. Muestra tus operaciones.

Clasificación

Procesos: *Conexiones*

Contenido o Subescala: *Cambio y relaciones*

Contexto o Situación: *Personal*

Nivel: 6 (723 puntos)

Crterios de Calificación

2 Puntos: Respuestas correctas (no se requieren las unidades) para metros/minuto y km/hora:

- $n = 140 \times .80 = 112$
- Por minuto camina $112 \times .80$ metros = 89.6 metros
- Su velocidad es de 89.6 metros por minuto
- Así, su velocidad será de 5.38 o 5.4 km/h
- Se asignan 2 puntos siempre y cuando se presenten ambas respuestas correctas (89.6 y 5.4), aunque el desarrollo realizado se muestre o no. Nótese que son aceptables los errores debido al redondeo. Por ejemplo, 90 metros por minuto y 5.3 km/h (89×60) son aceptables.

1 Punto: La velocidad en metros por minuto es correcta (89.6 metros por minuto) pero la conversión a kilómetros por hora es incorrecta o no aparece

- Método correcto (mostrado explícitamente) con errores de cálculo menores
- Sólo se presenta 5.4 km/h, pero no 89.6 metros/minuto (no se muestran cálculos intermedios)
- $n = 140 \times .80 = 112$. No se presentan más desarrollos, o bien son incorrectos a partir de este punto.

0 Puntos: Otras respuestas.



Comentarios

En esta unidad de reactivos, el estímulo que se presenta a los alumnos es la foto de los pasos de una persona, con una medición aproximada y un supuesto de que el tamaño de cada paso P es la distancia entre los talones de dos huellas consecutivas, además de una fórmula ($n/P = 140$) que relaciona el número de pasos por minuto y el tamaño del paso en metros.

La unidad consta de dos preguntas, en la pregunta uno, para contestar la interrogante que se le hace al alumno solamente necesita sustituir los valores en la fórmula dada, despejar bien la variable hacer las operaciones necesarias para llegar a la respuesta. En cambio, en la pregunta dos hay una dificultad más pues además de sustituir bien la fórmula dada, se requiere que se hagan las conversiones necesarias.

Este tipo de problema *es muy semejante* a los que se le presentan a los alumnos en forma de consignas en los planes de clase a través de los cuales se desarrollan los conocimientos y habilidades, pues se les presenta una problemática contextualizada que signifique un reto, una problema que motive a poner en juego la actividad cognitiva del alumno y donde en un trabajo de equipo se pueda llegar procedimientos de solución. Este tipo de problemas también se propone en los exámenes de fin de cada Bloque, los que hay que contestar individualmente.

La información que se presenta es relevante, pues aunque son aspectos poco usuales (el saber cuántos pasos da una persona) puede resultar interesante para los estudiantes ese tema. La fórmula que presenta es un supuesto, pues no aclara de donde se obtiene, claro está que para el problema no es necesario saberlo, pero los alumnos pudieran quedarse con la duda de donde sale la fórmula que ahí se presenta.

El estímulo se presenta con un lenguaje apropiado para los alumnos y hay claridad en la redacción y en el vocabulario. Se plantea un problema que puede tener variantes en los procedimientos de solución, no así, en la respuesta, pues es única en el primer reactivo y en el segundo sí da lugar a dos respuestas.

Para resolver estos reactivos el alumno requiere saber:

- sustituir valores en una fórmula
- despejar una variable
- resolver el problema
- hacer conversiones de unidades de longitud

El alumno de 15 años, de acuerdo al Programa 2006 ya debe manejar estos elementos, pues el tema de proporcionalidad, así como el de variación funcional se ven a lo largo de dos grados de la educación secundaria en varios apartados y como se dijo antes puede resolverlo mediante varios procedimientos.



En el reactivo dos se observa más complejidad, pero los conceptos que se manejan se trabajan en el programa y lo relacionado a las conversiones se viene tratando desde 5° y 6° de primaria, aunque es un contenido (realizar conversiones de medidas) que siempre ha presentado dificultades para los estudiantes.

Para los adolescentes de 15 años este tipo de estímulos es familiar, pues lo han trabajado en varias consignas del programa y es pertinente el problema que plantea.

Las interrogantes que sugiere son parte de los aprendizajes esperados del Bloque II de primer grado y por tanto del trabajo de varios de los apartados del programa de estudios 2006, del tema de proporcionalidad, que como ya se dijo se ve en los dos grados, de la educación secundaria y es tratado en dos de los ejes temáticos y en dos subtemas.

En el Eje de Manejo de la información es tratado en el tema Análisis de la información y el subtema Relaciones de proporcionalidad. El aprendizaje esperado que se señala para estos conocimientos y habilidades es:

Primer Grado, Bloque 2

4.- Resuelvan problemas de proporcionalidad directa del tipo valor faltante, con factor de proporcionalidad entero o fraccionario y problemas de reparto proporcional.

Algunos apartados en los que los alumnos van estudiando progresivamente estos temas son:

Grado I, Bloque I. A1.6...Grado primero, Bloque I Apartado 1.6

Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa, del tipo valor faltante, en diversos contextos, utilizando de manera flexible diversos procedimientos.

Grado I, Bloque II. A 2.7....Grado primero, Bloque 2, Apartado 2.7

Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa del tipo valor faltante, en diversos contextos, utilizando operadores fraccionarios y decimales.

Grado I, Bloque III. A3.5.... Grado primero, Bloque 3, Apartado 3.5

Resolver problemas del tipo valor faltante utilizando procedimientos expertos

Grado II, Bloque I. A1.7... Grado segundo, Bloque 1, Apartado 1.7

Determinar el factor inverso dado una relación de proporcionalidad y el factor de proporcionalidad fraccionario.

El programa también se refiere a los conocimientos y habilidades, por el que se puede resolver este reactivo, en el Eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, en el Tema Significado y uso de las literales, en el subtema relación funcional.



Grado I, Bloque IV. A4.3..... Grado primero, Bloque 4, Apartado 4.3

Analizar en situaciones problemáticas la presencia de cantidades relacionadas.....

Estos reactivos, PISA los clasifica dentro del contenido *cambio y relaciones*, refiriéndose a algunos procesos de crecimiento que pueden describirse o modelarse mediante funciones matemáticas sencillas: lineales, exponenciales, periódicas tanto discretas como continuas. De manera que en el caso del programa 2006 se referiría al subtema relación funcional, lo que corresponde a una *clasificación similar*.

El tipo de contexto al que se refiere PISA es personal y en el programa se trabajan problemas tanto de proporcionalidad como de relación funcional en contextos de la vida del alumno, que le motiven, le interesen y que contengan un reto cognitivo para los alumnos.

En relación a los procesos que requieren los estudiantes para resolver este reactivo PISA dice que en el *primer reactivo* se requiere del proceso de reproducción, donde el alumno requiere del conocimiento de los hechos, la representación, el reconocimiento de equivalencias, la retención memorística de objetos y propiedades matemáticas, el desarrollo de procedimientos de rutina, la aplicación de algoritmos estándar y el desarrollo de destrezas técnicas, y los sitúa en el nivel 5 *que solicita del alumno resolver problemas*, usando el álgebra avanzada, modelos y expresiones matemáticas formales; asociar representaciones matemáticas formales o situaciones complejas del mundo real; usar habilidades de solución de problemas complejos y de multinivel; reflexionar y comunicar razonamientos y argumentaciones.

En el *segundo reactivo* dentro del aspecto de *conexión*, donde el alumno reúne ideas y procedimientos matemáticos para resolver problemas directos que ya no son de mera rutina. Considera la construcción de modelos, traducción, interpretación y solución de problemas estándar y la aplicación de métodos múltiples bien definidos. El nivel que corresponde es el 6, donde se pide al alumno usar comprensión significativa y habilidades de razonamiento y argumentación abstractas. Tener conocimiento técnico y de convenciones para solucionar problemas y de generalizar soluciones matemáticas a problemas complejos del mundo real.

Haciendo una asociación de estos aspectos y niveles se puede observar que el programa trata de manera amplia el conocimiento y la habilidad y la metodología que propone apoya el desarrollo de la argumentación y las habilidades de razonamiento al estar trabajando en equipos y en la confrontación de ideas, por lo que se concluye que lo que se trabaja en ese tema en el programa 2006 sí es un medio que coadyuva a que los alumnos puedan construir bien los conocimientos y habilidades y desarrollen competencias, para poder ser evaluados en diferentes instancias.

Las tareas que se evalúan en ambos reactivos están sugeridas en el programa de estudios y relacionadas con los aprendizajes espera-



dos ya descritos anteriormente. Los alumnos pueden tener dificultades a la hora de sustituir, de despejar o bien colocar el punto decimal, o como ya se dijo para realizar las conversiones de unidades de longitud, pero sin duda el reto relevante es: para el primer reactivo el desarrollo correcto y para el segundo tanto el desarrollo correcto como la conversión. Los dos reactivos tienen claridad en el vocabulario y la redacción y lo que se evalúa en ellos es lo que se practica en el aula en los conocimientos y habilidades ya antes mencionados y a través de la metodología que propone el programa.

Síntesis

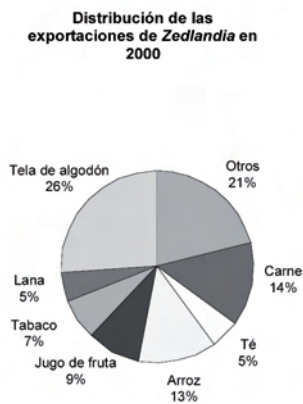
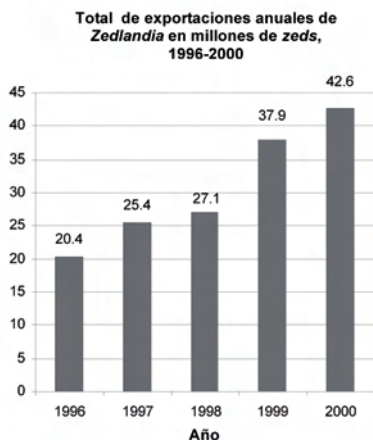
	DIMENSIONES		NIVELES DE DESEMPEÑO		HABILIDADES IMPLICADAS	
	PISA	PROGRAMA 2006	PISA	PROGRAMA 2006	PISA	PROGRAMA 2006
ESTÍMULO	Contenido: Cambio y relaciones Contexto: Personal	Tema: Análisis de la información Subtema: Relaciones de proporcionalidad Tema: Significado y uso de las literales, Subtema: Relación funcional		Identificar y resolver situaciones de proporcionalidad directa, de tipo valor faltante, en diversos contextos y con varios procedimientos.	Las relacionadas a los aspectos de reproducción y conexión	Analizar en situaciones problemáticas la presencia de cantidades relacionadas representadas por una expresión algebraica. Identificar los vínculos que existen en las representaciones
REACTIVO 1	Reproducción		Nivel 5			
REACTIVO 2	Conexión		Nivel 6			

En conclusión, se observa que el Programa de Matemáticas 2006 trabaja los contenidos que evalúa en esta unidad de reactivos y que, en una forma progresiva, se va trabajando en diferentes Bloques y Apartados los conocimientos y habilidades que se requieren para que vayan desarrollando las competencias necesarias para que los alumnos puedan resolver este tipo de unidad de reactivos



Unidad: Exportaciones

En las gráficas siguientes se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el zed como moneda.



Comentarios

¿Qué es lo que se observa en esta gráfica? Millones de zeds captados por exportaciones. Pero estas cantidades están *simplificadas*. En efecto, 20.4 corresponde a 20 400 000 de zeds, etcétera.

La pregunta que se plantea con parte de este estímulo es:

Pregunta 1: Exportaciones

M438Q01

¿Cuál es el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

Respuesta:.....

Clasificación

Procesos: *Reproducción*

Contenido o Subescala: *Probabilidad*

Contexto o Situación: *Pública*

Nivel: 2 (427 puntos)

Criterios de Calificación

1 Punto: 27.1 millones de zeds o 27 100 000 ó 27.1 (no se requiere la unidad)

0 Puntos: Otras respuestas.

Comentario

El alumno solamente debe considerar la columna correspondiente de la gráfica.

**Comentarios**

Hay que responder que en el año en cuestión fueron 27.1 millones de *zeds*, pues no se le pide la conversión a 27 100 000. Es decir, la respuesta debe ser directa y solamente se utiliza la observación directa.

Apegándose a este marco, la pregunta en cuestión tiene los siguientes elementos de proceso:

- Conocimiento de los hechos, es decir, asuntos relacionados con la representación abreviada de cantidades grandes, lo cual se utiliza en el eje vertical.
- Conocimiento de los elementos en una representación, en este caso con una gráfica de barras y con la abreviación de cantidades grandes.
- Corresponde a una pregunta del tipo: ¿cómo hallamos?

Las respuestas implican distinguir definiciones de los ejes en la gráfica y las relación entre el eje horizontal (años) y el eje vertical (millones de *zeds*).

El contenido se refiere específicamente a:

- Identificar, no necesariamente por un análisis exhaustivo o complejo, en una gráfica (representación visual) la correspondencia entre dos datos: el año y la cantidad de millones *zeds* correspondientes.

De tal modo que el asunto que se propone como estímulo:

- Sería una *analogía* de lo que sucede en el entorno cercano de la persona, que para apegarse a la definición de contexto dada en PISA, debería habitar *Zedlandia*.



Se puede decir que el estímulo presenta información de la que se solicita en planes y programas de estudio de educación secundaria.

En la clasificación de proceso o contenido puede coincidirse, aunque parece haber poco espacio para resolver dudas sobre las habilidades que se ponen en juego realmente en la pregunta, pues al parecer basta la observación y no se requiere ningún proceso complejo. Lo cual se discutirá enseguida.

Las informaciones son cercanas fundamentalmente a quienes acostumbran leer los medios escritos de información y se interesan por lo que ocurre en contextos ajenos, no son cotidianas para los estudiantes de la población objetivo de PISA, se sabe que los jóvenes de 15 o 16 años cumplidos no leen mucho en realidad, en particular no acostumbran leer diarios y menos asuntos relacionados con problemáticas de comercio nacional o internacional. Por lo anterior, la información no parece relevante, pues lo *cotidiano* depende de las preferencias y necesidades de información de los sujetos considerados, la cercanía de la información con el estudiante según los criterios de PISA es fundamental.

Varios asuntos encontrados en la investigación se refieren a la detección de baja transferencia de lo que se aprende en la escuela, en particular con lo referente a asuntos sobre la invención, analogía o transferencia de situaciones, referidas a contextos conocidos o fáciles de conocer. Es decir, los estudiantes, a pesar de resolver situaciones familiares, no pueden desarrollarse en el mismo sentido cuando esto se transfiere a situaciones análogas. Al ser información gráfica queda de lado el vocabulario y redacción, pero hay claridad en lo que se incluye.

No hay mucha dificultad en la situación planteada, pues integra simbología y términos familiares para los estudiantes del nivel, aunque requiere capacidad para establecer analogías o realizar transferencias de situaciones académicas, dado que no corresponden con la vida cotidiana del estudiante. En suma, no hay familiaridad de la pregunta ni pertinencia de ésta para un adolescente de 15 años.

En la redacción de las características de los niveles, no se indica con claridad a cuál de ellos corresponde la habilidad de transferir procedimientos básico a situaciones desconocidas, en las cuales el contexto podría ser poco cotidiano. Solamente se hace referencia a: *familiar* o *no familiar*. Parece que no se le da importancia a las habilidades relacionadas con establecer analogías o transferir conocimiento. Aunque se podría ubicar este aspecto en otras partes de manera implícita, pero para hacer operativa la clasificación no debería dejarse a la imaginación, debería hacerse explícito. Cabe mencionar que la habilidad para detectar analogías y abstraer contenido matemático es muy importante en el desarrollo del pensamiento matemático, la historia de la disciplina da excelentes ejemplos de ello.



Pregunta 2: Exportaciones

M438Q02

¿Cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000?

- A 1.8 millones de zeds.
- B 2.3 millones de zeds.
- C 2.4 millones de zeds.
- D 3.4 millones de zeds.
- E 3.8 millones de zeds.

Clasificación

Procesos: *Conexiones*

Contenido o Subescala: *Probabilidad*

Contexto o Situación: *Pública*

Nivel: 4 (565 puntos)

Criterios de calificación

1 Punto: E 3.8 millones de zeds.

0 Puntos: Otras respuestas.

Comentarios

La discusión requerida es muy similar a la que se desarrolló para la pregunta anterior. Parece que el estudiante solamente ve la gráfica, reconoce la cantidad correcta y elige la opción acertada. El contenido, al referirse a situaciones relacionadas con gráficas estadísticas, sigue siendo probable. Asimismo la situación se considera pública.

Sin hacer referencia necesaria a Zedlandia o al zed, se puede responder, pues se ubica en asuntos más familiares a los estudiantes; incluso ese tipo de gráficas son más familiares al estudiante, como los deportes, la música o los espectáculos. La problemática de interpretar ejes no se presenta en este caso, resulta más sencilla esta pregunta que la anterior, incluso cabe mencionar que los aspectos referidos a la analogía, transferencia o abstracción aquí no parecen importantes.



ANEXO II.

ACERCA DE LOS AUTORES

María Teresa Adriana Fonseca Cárdenas estudió la carrera de contador público y auditor en la Facultad de Comercio y Administración de la Universidad de Guadalajara. Asistió y participó en los cursos intensivos de nivelación pedagógica ofrecidos por la Dirección General de Mejoramiento Profesional del Magisterio de la Secretaría de Educación Pública. Estudió la maestría de Ciencias de la Educación en el Instituto Superior de Investigación y Docencia para el Magisterio, del que obtuvo la especialidad en Sociología. En el área de la docencia, trabajó durante un lapso de 23 años como docente de la asignatura de Matemáticas en la modalidad de Secundarias Técnicas. Participó en el equipo estatal de la Reforma de Secundaria en el acompañamiento y asesoría a los maestros de Matemáticas en las escuelas de Jalisco que participaron en la Primera Etapa de Implementación. Actualmente pertenece a la unidad de jefes de enseñanza de Secundarias Técnicas en el estado de Jalisco, con especialidad en Matemáticas. Es asesora nacional de la Reforma de Educación Básica, donde colabora en la elaboración de planes de clase de Matemáticas para secundaria y primaria, además apoya en reuniones regionales y estatales. Imparte en diferentes semestres las asignaturas de Álgebra Superior, Geometría Plana, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Estadística Descriptiva en la Universidad del Ejército y Fuerza Aérea del Colegio del Aire en la ciudad de Zapopan, Jalisco.

Demetrio Garmendía Guerrero es egresado de la carrera de Matemáticas que se imparte en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Durante más de 28 años ha trabajado en el medio editorial tanto en la industria privada como en ámbito público (Embajada de Estados Unidos de América), donde se ha desempeñado como corrector de estilo, revisor técnico, traductor, supervisor editorial, *sponsor editor*, gerente de producto y gerente corporativo, siempre dentro del contexto de la educación superior y particularmente en el área de ciencias exactas. Asimismo, ha trabajado en diversas ocasiones para la Secretaría de Educación Pública, siendo la primera vez como guionista de televisión especializado en Matemáticas para la Unidad de Televisión Educativa y Cultural (UTEC), que fue el antecedente de lo que ahora es la Dirección General de Televisión Educativa



(Dgtv). Recientemente estuvo laborando (de 2006 a 2007) en la Dirección de Materiales y Métodos Educativos, supervisando los guiones, los libros para el alumno y los libros para el maestro de la asignatura de Matemáticas pertenecientes al sistema de Telesecundaria. Durante su estancia en esa dirección, también asesoró la grabación y la posproducción de los guiones mencionados. Fue evaluador de cualquier tipo de material que se relacionaban con Matemáticas. Además fue responsable de la calificación de los exámenes y la creación de reactivos para el sistema SEA (Educación a distancia para adultos) para el área de matemáticas. También ha sido asesor de la SEP al impartir tres módulos del diplomado en Matemáticas que en 2008 se ofreció a los maestros de primaria. Por último, hasta el momento lleva publicado un libro de Matemáticas para secundaria y otro para primaria.

María del Rosario Licea García realizó sus estudios profesionales en la Normal Ing. Miguel F. Martínez y en la Escuela Normal Superior del Estado de Nuevo León. Cursó una maestría en Educación Media en la especialidad de Matemáticas en la Escuela de Graduados de la Escuela Normal Superior. Se ha desempeñado como maestra de primaria y de secundaria durante más de treinta años. Actualmente se dedica a la asesoría técnico pedagógica de los docentes de Matemáticas en el Departamento Técnico Pedagógico de la Secretaría de Educación en el Estado de Nuevo León y al trabajo frente a grupo en la Escuela Secundaria Técnica 41 Profesor Juan Villarreal Villarreal, donde atiende grupos de primero y segundo grado en la clase de Matemáticas. En los últimos tres años ha participado en el proceso de la Reforma en Secundaria como representante de su estado en las reuniones nacionales del equipo de fortalecimiento curricular que se ha realizado durante el piloteo y en el trabajo de generalización de esta reforma.

Contacto: marialicea2@yahoo.com.mx

Eduardo Mancera Martínez estudió la licenciatura en Física y Matemáticas de la ESFM del IPN. maestría y doctorado en el Cinvestav del IPN. Como docente ha impartido diversos cursos de Matemáticas o de educación Matemática en secundaria, bachillerato, licenciatura, maestría y doctorado. Son varias las instituciones donde ha desarrollado investigación o acciones de formación de profesionales: INEA, Conafe, UNAM, UAM, IPN, UPN, Cobach, UDLA, UV, UPV, UIA, UBC, UAS, ILCE, entre otras. Fue coordinador de la Academia de Matemáticas de la UPN, la Línea de Educación Matemática de la Maestría y Doctorado de la UPN y de la Línea de Investigación sobre Didáctica de la Ciencias en la UIA. Fue secretario técnico para la asignatura de matemáticas en el proyecto de Modernización de la Educación Básica, asesor de subsecretarios como los de Educación Media y Educación Básica y del Secretario de Educación del Estado de Veracruz; también tuvo responsabilidades como: subdirector de Innovación Educativa del ILCE, subdirector de Apoyo Técnico Complementario de la Dirección Educación Especial y secretario académico de la UPN. Ha sido autor o coautor de varios libros de texto y artículos especializados en enseñanza de la matemática, también participó en la elaboración de los *Estados del Conocimiento sobre la investigación en Educación Matemática* del Comie. Es miembro fundador del comité editorial de la *Revista Educación Matemática* y colabora con otras revistas especializadas en educación. Ha sido



invitado para dictar múltiples conferencias en todo el país y en el extranjero. Fue presidente de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, presidente fundador de Maestros Enseñando con Tecnología Avanzada y actualmente es primer vicepresidente del Comité Interamericano de Educación Matemática.

Contacto: mancera.eduardo@gmail.com



