

Alicia Ávila
Silvia García Peña

Los decimales: más que una escritura

Los decimales: más que una escritura

Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa

Coordinación editorial:

Miguel Á. Aguilar R.

Teresa Ramírez Vadillo

Diseño y formación:

Luis E. Ramírez Juárez

Ilustraciones:

Carlos E. Elenes Díaz

**INSTITUTO NACIONAL PARA LA
EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN**

José Ma. Velasco 101-5º piso

Col. San José Insurgentes

Delegación Benito Juárez

03900 México, D.F.

Primera edición, 2008

El contenido, la presentación y disposición en conjunto y de cada página de esta obra son propiedad del editor. Se autoriza su reproducción parcial o total por cualquier sistema mecánico, electrónico y otros, citando la fuente.

Impreso y hecho en México

ISBN 978-968-5924-32-0

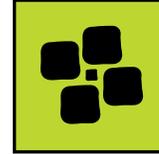
Los decimales: más que una escritura

Reflexiones sobre su aprendizaje y enseñanza



Materiales para apoyar la práctica educativa

Alicia Ávila
Silvia García



El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) tiene como misión *contribuir al mejoramiento de la educación en México a través de la realización de evaluaciones integrales de la calidad del sistema educativo y de los factores que la determinan, así como de la difusión transparente y oportuna de sus resultados para apoyar la toma de decisiones, la mejora pedagógica en las escuelas y la rendición de cuentas.*

Aunque a lo largo de sus seis años de vida el INEE ha producido una gran cantidad de publicaciones para dar a conocer los resultados de sus evaluaciones a públicos diversos, fue sólo a mediados de 2007 cuando se propuso elaborar materiales expresamente dirigidos a profesores y directivos escolares. Para ello se buscó la colaboración de especialistas que, además de un adecuado dominio de su disciplina, tuvieran conocimiento cercano del quehacer docente en escuelas de Educación Básica. A estos especialistas se les invitó a elaborar textos que versaran en torno a algunos de los problemas identificados por las evaluaciones del instituto, a la vez que ofrecieran a los maestros formas novedosas de atenderlos y reflexionar sobre ellos.

Los borradores fueron revisados por un Comité Técnico conformado por expertos reconocidos a nivel nacional y por un Comité Didáctico integrado por profesores de primaria y secundaria que laboran en escuelas urbanas, rurales e indígenas. Estos últimos probaron los materiales en sus aulas y, con base en ello, hicieron observaciones respecto a las fortalezas y debilidades de las propuestas, así como sugerencias para enriquecer los textos.

Hoy el INEE se enorgullece de poder ofrecer a los maestros de primaria y secundaria la colección *Materiales para apoyar la práctica educativa*. Los cuatro libros que la conforman buscan brindar a los profesores herramientas creativas para mejorar la enseñanza en sus salones de clase, proponiendo formas novedosas de apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Dos de los mate-

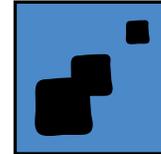


Los decimales: más que una escritura

riales tratan sobre la promoción y el desarrollo de las habilidades de escritura, mientras que los otros dos abordan temas puntuales de las Matemáticas: los números decimales y la geometría.

Al poner estos textos a su alcance, el INEE refrenda su convicción de que la evaluación puede contribuir efectivamente a la calidad educativa. Es nuestro deseo que esta nueva línea de publicaciones sea de gran interés para los maestros; que en ella encuentren retroalimentación valiosa para ofrecer a los niños y jóvenes mexicanos más y mejores oportunidades de aprendizaje.

Annette Santos del Real
Directora General Adjunta, INEE



Estimadas maestras, estimados maestros:

El libro que tienen en sus manos forma parte de una colección de textos cuya finalidad es contribuir a mejorar la enseñanza y los procesos de aprendizaje en la Educación Básica, atendiendo a un doble compromiso. En primer término, al que deriva como parte de todo proceso evaluativo y que consiste en ofrecer a la población evaluada una retroalimentación congruente y pertinente y brindarle mecanismos para mejorar sus logros. En este sentido, los materiales centran su atención en el tratamiento de temas y contenidos que, conforme a las pruebas nacionales e internacionales como las aplicadas por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), han presentado mayores dificultades para los alumnos de primaria y secundaria.

En segundo término, el compromiso que tiene la Secretaría de Educación Pública de dotar a los maestros de Educación Básica de herramientas que mejoren su enseñanza y, en consecuencia, favorezcan mejores aprendizajes en los niños y adolescentes. Por esta razón, los materiales están dirigidos a todos los maestros de Educación Básica, aunque se destinan de manera prioritaria a quienes trabajan en las escuelas que presentan condiciones de vulnerabilidad (Escuelas en Contextos Vulnerables y Escuelas de Tiempo Completo), donde se han detectado mayores dificultades para alcanzar el aprendizaje y la formación de calidad a los que niños y adolescentes tienen derecho.

Estos textos constituyen un referente donde los maestros encuentran propuestas alternativas para la enseñanza de los temas seleccionados. Lejos de pretender constituirse en la respuesta única a los problemas detectados, son un insumo para que los docentes amplíen el conocimiento, conozcan otras opciones y, lo más importante, desarrollen su invaluable creatividad para favorecer la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades en sus



alumnos. Estos materiales no son un manual que pretenda que los maestros sigan determinadas secuencias; por el contrario, son textos que interpelan a su dominio sobre los contenidos y sus métodos de enseñanza para que generen, por sí mismos y a través del diálogo con sus colegas, nuevas estrategias didácticas en las que reconozcan las condiciones particulares del contexto en que trabajan, valoren los saberes previos de sus alumnos y los acompañen en la generación de sus propios aprendizajes.

Mediante el diseño, la producción y distribución de los materiales que aquí se presentan, tanto el INEE como la SEP buscan impulsar mejores prácticas docentes y aprendizajes de mayor nivel, conscientes de que esta medida puede contribuir a elevar la calidad y la equidad de la educación que se ofrece a los alumnos de Educación Primaria y Secundaria.

La SEP, en especial la Subsecretaría de Educación Básica, agradece al INEE y a los autores de los textos su generosidad y su valiosa contribución. Asimismo, confía en la capacidad de los maestros para aprovechar de la mejor manera estos materiales y espera de ellos sus aportaciones y observaciones para enriquecerlos, así como sugerencias para ampliar esta colección con temas que aborden los problemas que maestros y alumnos enfrentan en su trabajo cotidiano con los planes y programas de estudio, y las estrategias que favorecen el logro de las competencias y de los rasgos deseables en los egresados de Educación Básica.

José Fernando González Sánchez
Subsecretario de Educación Básica, SEP

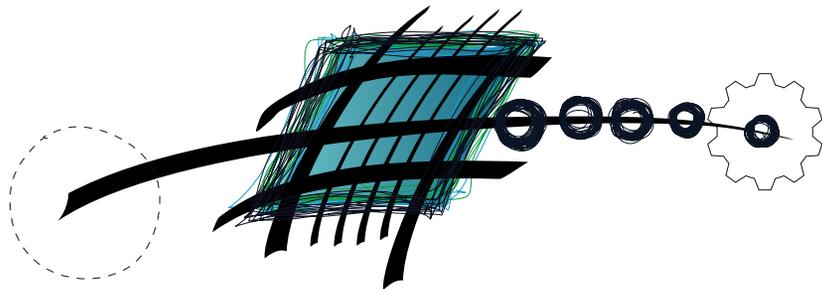
Índice

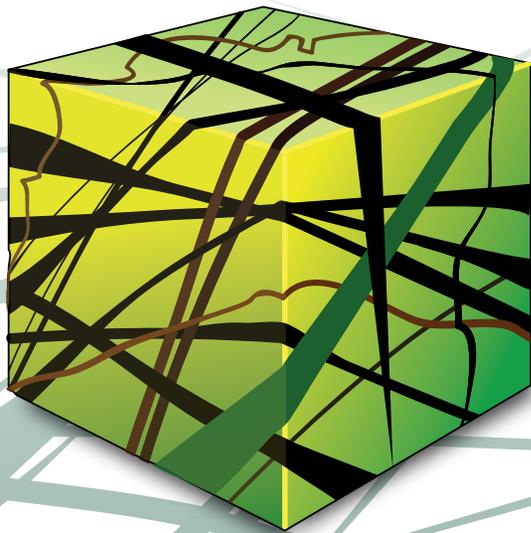
Presentación	11
Introducción	19
I. El concepto de número decimal	25
1. ¿Qué son los números decimales?	27
2. Los decimales en la vida cotidiana	28
3. Los decimales: ampliando los conjuntos numéricos	29
4. La representación usando el punto decimal, algo de historia	30
5. Números decimales y expresiones decimales	33
6. ¿Los niños entienden los decimales?	35
7. Un mismo número, diferentes representaciones	39
8. Orden en los números decimales	46
9. La propiedad de densidad	50
10. Los decimales: más que una escritura	54
II. Los problemas y el cálculo con los números decimales	61
1. Los problemas en el aprendizaje de los números decimales	63
2. Resolución de problemas con números decimales	65
3. El cálculo con decimales desde la historia	67
4. Sentido numérico y números decimales	69
5. Los algoritmos convencionales de las operaciones con decimales	74
a. Adición y sustracción de números decimales	74
b. Multiplicación de números decimales	76
c. División de números decimales	78
III. Los números decimales en los Excale	85
1. Educación Primaria, sexto grado	87
2. Educación Secundaria, tercer grado	93



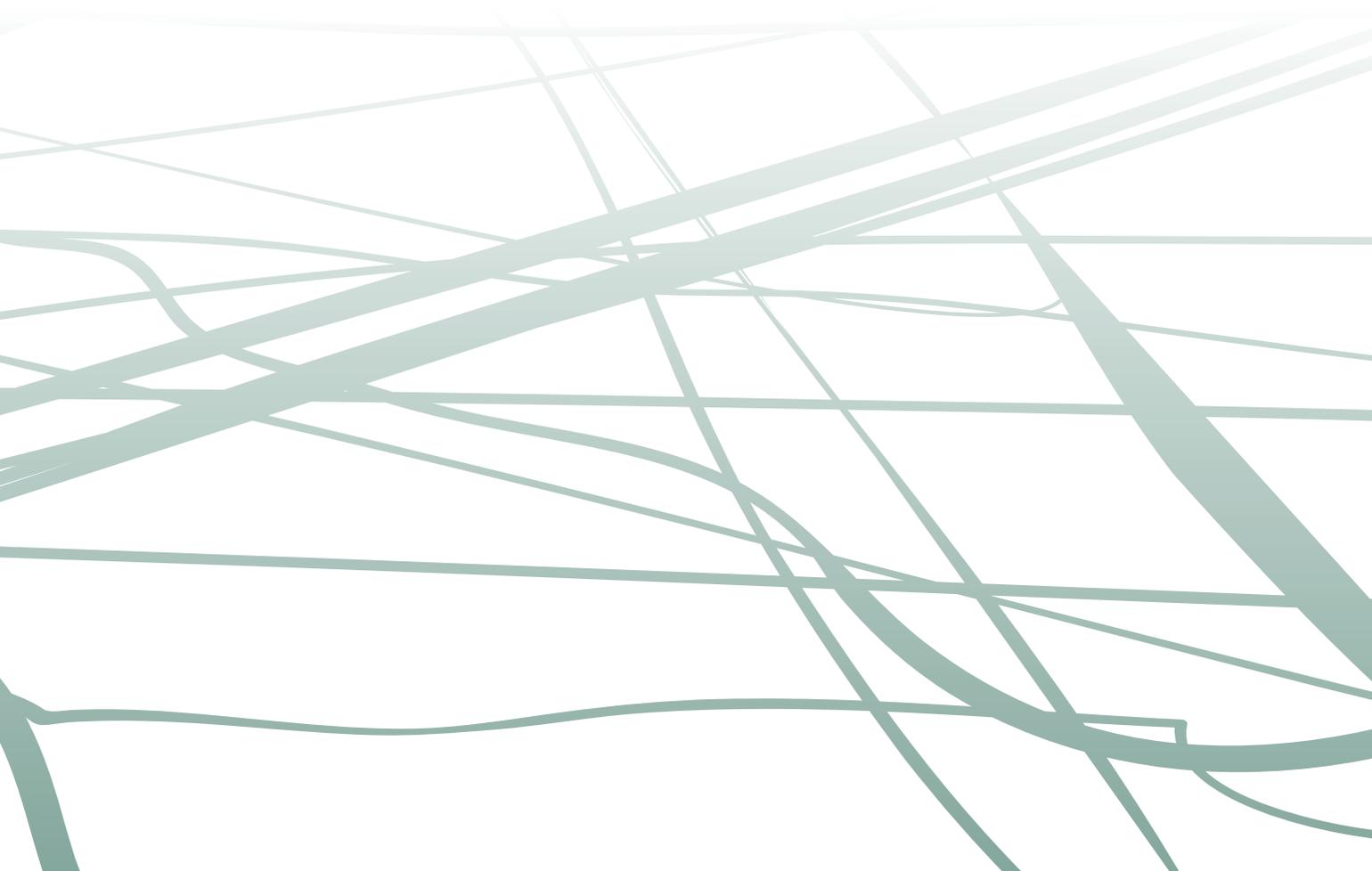
Los decimales: más que una escritura

Anexo	101
Bibliografía	109
Lecturas recomendadas	112
Colaboradores	113





Presentación



La reforma educativa que se iniciara en 1993 tuvo como referentes los resultados de investigaciones en didáctica de la matemática desarrolladas tanto en México como en otros países. Dicho referente implicó la puesta en marcha de una metodología de enseñanza diseñada desde una perspectiva constructivista del aprendizaje de la Matemática. Desde el inicio se asumió que la tarea era difícil dado que, además de la necesaria ampliación del conocimiento matemático de los maestros, se hacía ineludible una redefinición de la práctica docente.

Los materiales de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje, y las acciones de formación y actualización que se implementaron para la consecución de la reforma, fueron una primera aproximación para socializar entre los maestros las nuevas ideas metodológicas; sin embargo, era predecible, dada la complejidad de la aspiración, que este esfuerzo, si bien necesario, resultaría insuficiente.

A 15 años de iniciada la reforma contamos con mayores elementos para valorar los logros y las limitaciones en relación con la necesaria reconversión de las prácticas de enseñanza y los conocimientos disciplinares de los maestros. Hoy, es necesario imaginar nuevos escenarios y recursos a fin de coadyuvar a los profesores en su actividad docente: el libro que se pone a disposición de los profesores tiene esa intención.

Alicia Ávila y Silvia García, autoras de esta propuesta, optan por una vía diferente de comunicación del conocimiento matemático: el eje de la exposición son los números decimales pero entretajan en su presentación una serie de consideraciones con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de los mismos. Con base en la información que ofrecen en el libro buscan abrir espacios de reflexión que apoyen a los maestros en las decisiones sobre cómo organizar sus clases alrededor de este contenido. Sin embargo, anticipan al lector que



el libro no es un *catálogo de sugerencias y actividades para la enseñanza de los decimales*. En ello radica la originalidad de la propuesta: depositan en el maestro la responsabilidad de las decisiones que le corresponden sobre cómo enseñar un tema, pero no dejan de darle los insumos necesarios para comprender la complejidad del mismo y las posibilidades de los niños para razonar sobre él y acceder a su conocimiento.

Estos insumos, a su vez, seguramente propiciarán en los maestros interesantes reflexiones acerca de su propio conocimiento del tema, de lo que han considerado sobre su enseñanza y la posibilidad que los niños tienen de comprender y trabajar con los decimales, que son algo más *que números con un punto*.

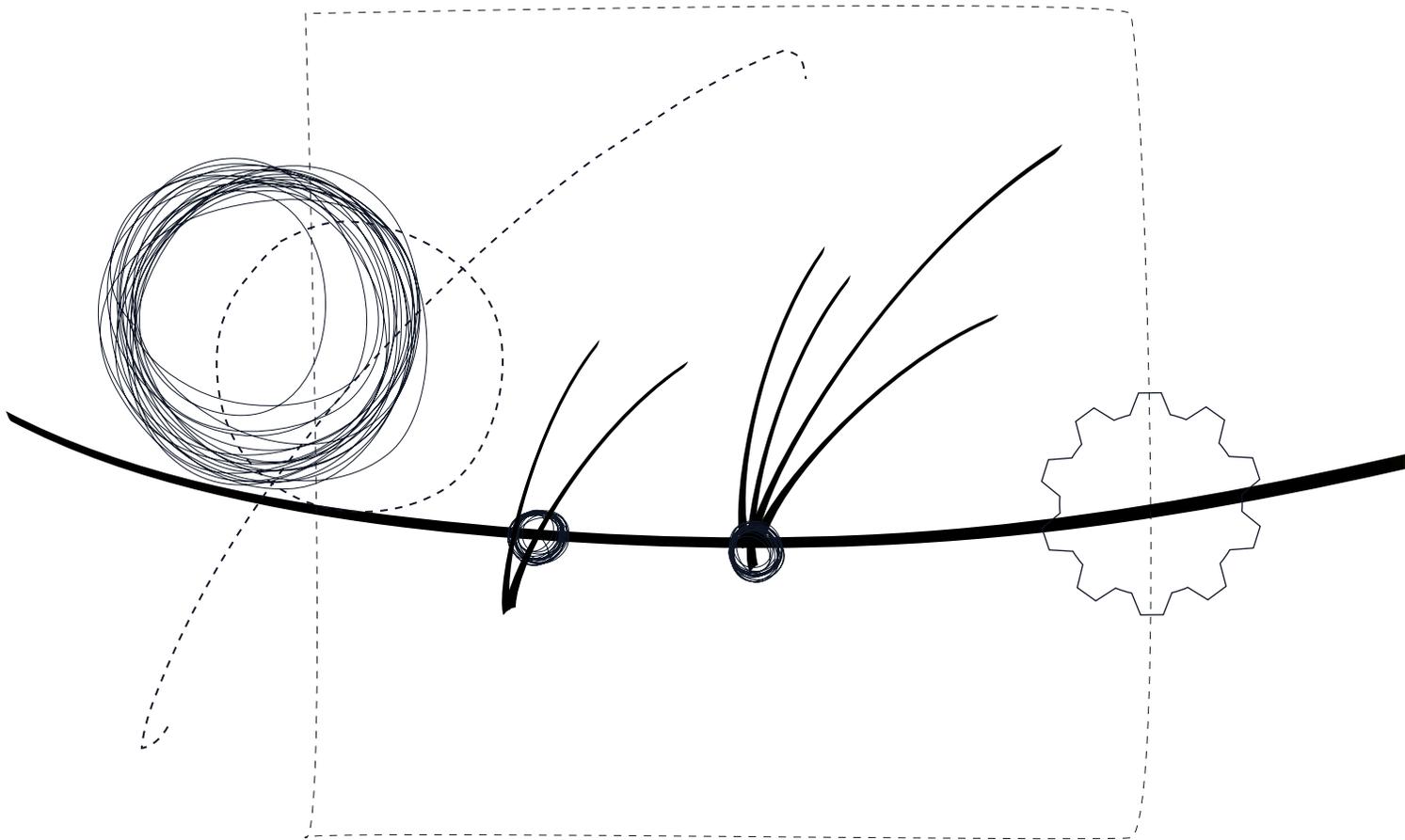
Otro componente de deliberación interesante que las autoras incorporan en el texto es el análisis de algunos reactivos de Excale, así como de los errores que con mayor frecuencia se cometen en su resolución, con el fin de ayudar a los profesores en su comprensión respecto a los conocimientos y las habilidades necesarios para el aprendizaje de esta compleja temática.

Esperamos que con la lectura de esta propuesta los docentes encuentren respuestas a sus inquietudes y un apoyo importante para el desarrollo de su labor educativa.

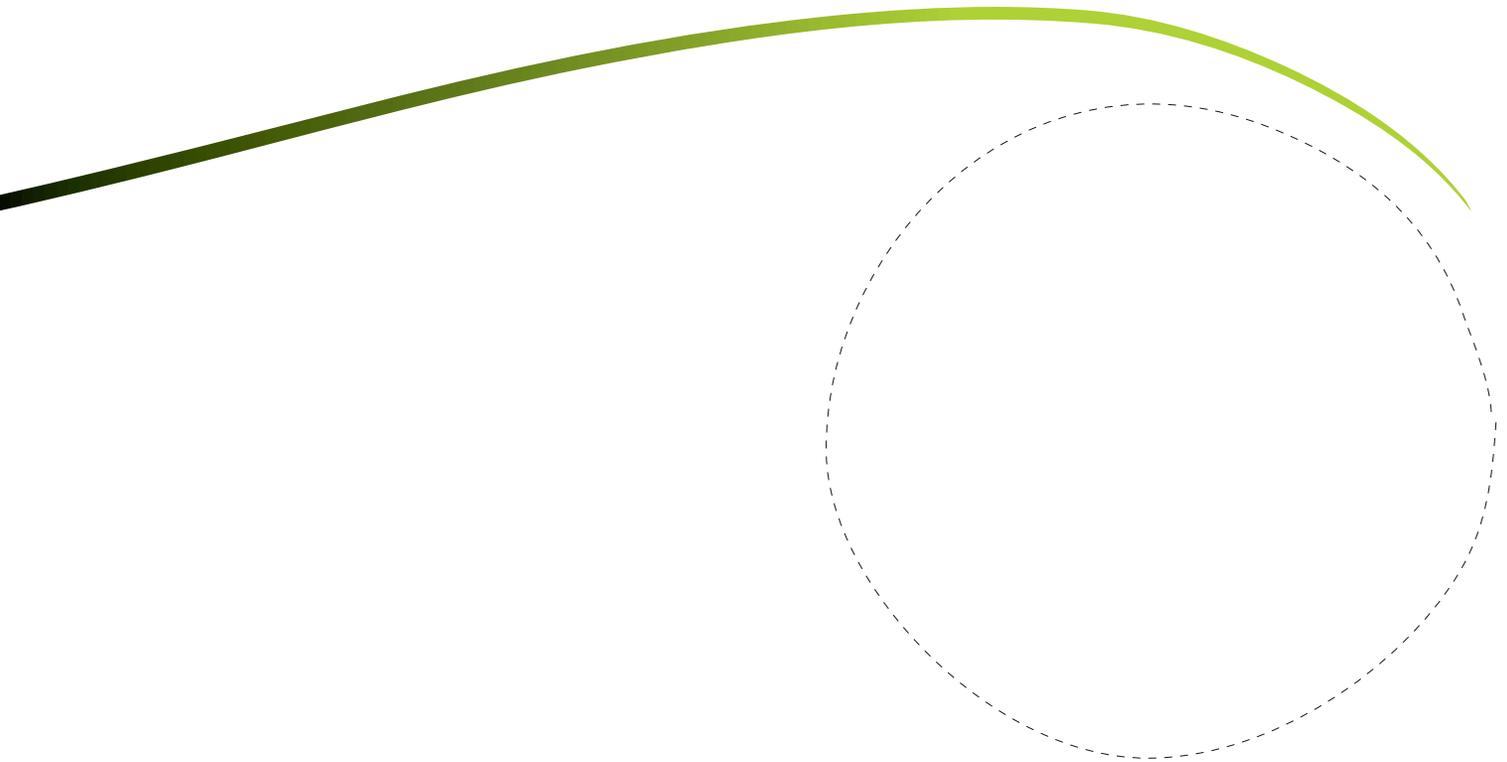
Irma Fuenlabrada Velásquez

Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav





Introducción



Como su nombre indica, este libro trata de los números decimales. El tema se aborda tocando tanto aspectos matemáticos como reflexiones sobre su aprendizaje y enseñanza. Probablemente resulte extraño al lector que un libro trate este tema, puesto que lo más común es que, con unas cuantas explicaciones o actividades, como memorizar los nombres de las columnas y leer y escribir números, los decimales se den por vistos en la clase. En general los profesores tienen prisa por abordar las operaciones con decimales, y a eso es a lo que le dedican más tiempo en la escuela; los decimales no parecen considerarse un problema importante desde el punto de vista didáctico.

En consecuencia, el tema es escasamente trabajado en la Educación Básica; tanto en la práctica cotidiana como en los materiales de apoyo para la enseñanza se le dedica poco espacio a los decimales. Lo más común es que las preocupaciones de los profesores se centren en las fracciones, pues éstas –al contrario de los decimales– por tradición han sido reconocidas como un tema crítico de la Educación Primaria.

Sin embargo, tanto en los exámenes que ha aplicado el INEE (los Excale) como en otros estudios realizados mediante entrevistas con niños, se ha constatado que los decimales resultan excesivamente difíciles a los alumnos. Por ejemplo, lo más común es que los niños de primaria y aun los jóvenes de secundaria consideren que $.125$ es mayor que $.2$. Este hecho nos parece suficiente para revisar la idea tan extendida de que las fracciones merecen nuestro tiempo y preocupación docente, mientras que los decimales son simples de aprender, por lo que ameritan escasa planeación y esfuerzo didáctico.

Los números decimales son importantes porque tienen gran cantidad de aplicaciones en las actividades humanas y permiten solucionar problemas que no pueden resolverse con números naturales. Un ejemplo es la medición: los decimales permiten mejores aproximaciones al expresar medidas menores que



la unidad que se ha tomado como referencia. Por otra parte, las calculadoras nos obligan a interactuar constantemente con los decimales, de tal suerte que estos números toman relevancia fundamental en los cálculos de la vida práctica.

Las cuestiones que acabamos de comentar nos parecen razones suficientes para dedicar este pequeño libro al tema de los decimales. El trabajo está dividido en tres partes: la primera se titula *El concepto de número decimal* y en ella se aborda este tema desde una triple perspectiva: la disciplinar, la del aprendizaje y la de la enseñanza; la segunda parte trata de *Los problemas y el cálculo con los números decimales* y las dificultades más comunes en su aprendizaje y enseñanza; la tercera refiere a *Los números decimales en los Excale*, donde se analizan algunos reactivos relacionados con los decimales equivalentes a los de la prueba mencionada, se fija la atención en los conocimientos y las habilidades necesarios para resolver los reactivos, así como el significado de los errores que los niños cometen al intentar darles respuesta.

Con los aspectos considerados en este libro, creemos que el profesor tendrá más herramientas para trabajar los decimales de manera provechosa con sus alumnos; es decir, que podrá tomar decisiones en la clase que contribuyan al mejor aprendizaje del tema.

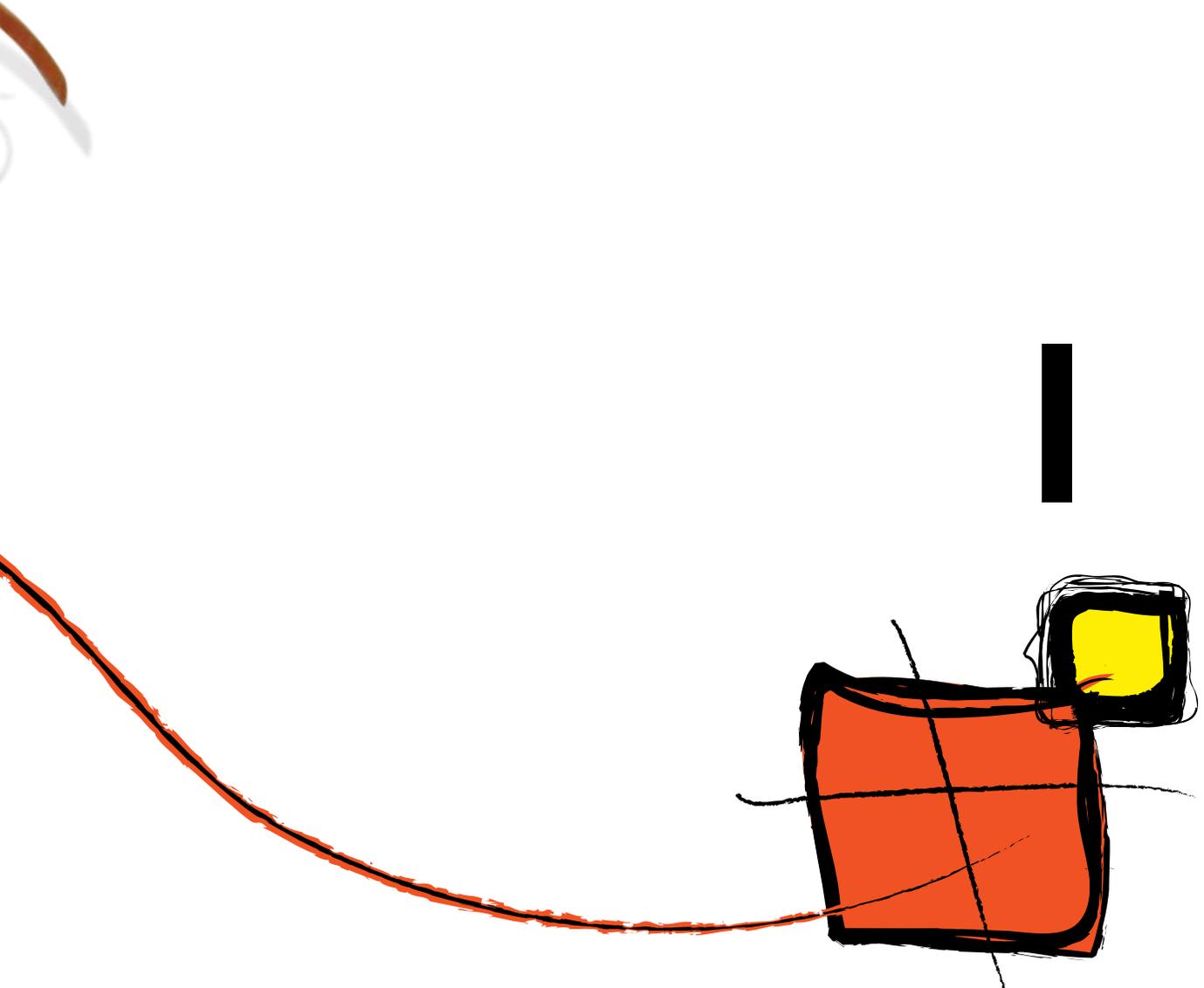
Por último, es importante mencionar que este trabajo parte de la consideración de que *el docente es un profesional reflexivo*, por lo que no se trata de un catálogo de sugerencias y actividades para replicar en la enseñanza de los decimales. El libro se basa en otro modelo de formación docente: *la reflexión sobre la práctica*; se concibe a ésta como elemento sustancial en la preparación y actualización del profesor y que tres aspectos que guían de manera fundamental su mejora son: el conocimiento disciplinar, el conocimiento sobre el aprendizaje de los alumnos y el análisis de la práctica docente propia o de otros colegas. Mediante el modelo de formación adoptado se pretende crear, en la interacción con el libro, un espacio de reflexión y participación donde el profesor –individualmente o en comunidad con otros colegas– se cuestione sobre los fundamentos de su ejercicio docente y construya alternativas sobre el mismo, aprovechando los elementos que se le ofrecen. Se recomienda que el estudio de este material se comparta con otros compañeros para enriquecer las reflexiones y los aprendizajes que de ellas se deriven.

Esperamos que el libro sea acogido por los docentes y que los conocimientos que se proporcionan y las reflexiones que se favorecen los motiven a experimentar en su aula nuevas vías de acercamiento a estos números que fueron creados para facilitar las cuentas de los hombres, pero que encierran más complejidad y riqueza de la que su representación *con punto* nos permite ver.





El concepto de número decimal



1. ¿Qué son los números decimales?

Lo más común es que a la pregunta *¿qué son los decimales?* se responda con la frase *son los números que llevan punto*. Pero ésta es apenas una respuesta parcial, puesto que *los decimales son mucho más que una escritura: son números que tienen ciertas propiedades y funciones que los hacen distinguirse de otros*, y la escritura utilizando el punto es sólo una de las formas que tenemos para representarlos. Una definición de número decimal, que introducimos sólo para iniciar la reflexión, es la siguiente: *Los números decimales son aquellos que pueden representarse en forma de fracción decimal*.

En este capítulo abordaremos la noción de número decimal y su representación utilizando el punto. Para introducirnos en el tema, incorporamos algunas preguntas que se han planteado a niños mexicanos y de otros países, así como las respuestas más frecuentes dadas a dichas preguntas:

- a) ¿Cuál número es el antecesor de 1.75?

Lo más frecuente es que los niños respondan 1.74

- b) ¿Cuál número es mayor 5.18 o 5.6?

Existe una alta probabilidad de que los alumnos respondan diciendo que 5.18 es mayor que 5.6 porque el 18 es mayor que el 6.

- c) Escribe un número que vaya entre 0.25 y 0.26

Es casi seguro que los alumnos digan que no pueden escribir nada porque creen que entre .25 y .26 no hay ningún número.



Estas preguntas están relacionadas con las propiedades de los números decimales, particularmente con el orden entre estos números. Tal vez por ahora el lector tampoco tenga respuestas precisas para algunas de las preguntas. Podrá construirlas a través del diálogo con este libro.



Actividad 1

Responda las siguientes preguntas:

Los decimales nos permiten expresar medidas de cantidades menores que la unidad que se ha tomado como referencia.

- ¿Qué lógica está en la base de las respuestas de los alumnos?
- ¿Por qué responden que 5.18 es mayor que 5.6, o que 1.74 es el antecesor de 1.75?
- ¿Cuáles aspectos de los decimales deben trabajarse con el fin de que los estudiantes sustituyan estas respuestas por las correctas?
- Si usted ha enseñado los decimales, ¿qué experiencias ha tenido al respecto?

2. Los decimales en la vida cotidiana

Los números decimales tienen una gran cantidad de aplicaciones prácticas tanto en la vida cotidiana como en otras áreas del conocimiento humano; son útiles en contextos de proporcionalidad como los porcentajes, conversiones de monedas, cálculo de costos, para expresar medidas, en la interpretación de información en tablas o gráficas, en la resolución de problemas químicos o físicos, etcétera. Los decimales nos permiten expresar medidas de cantidades menores que la unidad que se ha tomado como referencia. Por ejemplo, cuando decimos que el pizarrón mide 3.24 m de largo, como el metro es la unidad, entonces el pizarrón tiene como longitud 3 veces el metro y casi una cuarta parte más del metro (.24), que no puede expresarse con números naturales.

La siguiente afirmación —que podemos compartir o no— pone de relieve la importancia de los decimales:

Puesto que el sistema decimal ha sido adoptado para las calculadoras y las computadoras [comunes], parece probable que los decimales se utilizarán

cada vez más en las aplicaciones; y el uso de las fracciones decaerá gradualmente.¹



Actividad 2

Considere los siguientes encabezados y luego conteste.

Finiquita Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México deuda de 2.1 mdp con Gobierno del Distrito Federal.

Sólo se decomisó 1.9 tn de efedrina en Colima, corrige PGR a SAT.

Récord histórico del precio del petróleo; llega a 87.97 dólares el barril.

- ¿A qué cantidad de pesos corresponde el .1 mdp del primer encabezado?
- ¿A qué cantidad de kilogramos corresponde el .9 toneladas del segundo encabezado?
- ¿A qué cantidad de gramos corresponde el 1.9 toneladas del segundo encabezado?
- Si el día que salió el tercer encabezado el dólar se cotizaba a 10.50, ¿cuál fue el costo de barril de petróleo ese día?
- Piense en actividades en las que el uso de los números decimales sea indispensable.

3. Los decimales: ampliando los conjuntos numéricos

Los números decimales nos permiten resolver operaciones o problemas que no es posible solucionar con los naturales, como las siguientes:

¿Qué número multiplicado por 10 nos da 1?

¿Qué número multiplicado por 4 nos da 2?



¹ Margaret Brown (1981).



Las respuestas a estas preguntas no pueden encontrarse en los números naturales; para responderlas es necesario utilizar los números decimales: $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{2}$, porque: $10 \times \frac{1}{10} = 1$ y $4 \times \frac{1}{2} = 2$, o bien, $10 \times 0.1 = 1$ y $4 \times 0.5 = 2$.



Actividad 3

Resuelva los siguientes problemas; todos implican números decimales.

- El área de un pliego de papel es de 1 m^2 . Si el largo mide 2 m , ¿cuánto mide el ancho?
- En una fotografía el ancho de una puerta mide 3 cm y su altura mide 10 cm . Si el ancho real de la puerta es de 91 cm , ¿cuál es la altura real?
- Las calificaciones de Lety son: $7, 8, 8, 10$, ¿cuál es su promedio?
- ¿Cuánto vale m ? (Recuerde que $5 m$ significa 5 que multiplica a m):

$$5 m = 24$$

4. La representación usando el punto decimal, algo de historia

La notación decimal de las fracciones nació con el fin de simplificar los cálculos con dichos números. Esta representación utilizando el punto se basa en dos principios:

- El principio de valor de posición.
- La extensión del principio de posición a la escritura de números menores que la unidad.

La representación con punto decimal tiene diversos antecedentes en la historia de la humanidad:

Al-Uglidisi, matemático árabe que vivió en el siglo X, ya utilizaba en sus escritos las fracciones decimales y una notación parecida a la que utilizamos actualmente, separando la parte entera de la fraccionaria del número mediante una coma; por ejemplo: $2'35$, que entonces se leía *2 unidades y 35 de cien*,



La representación de las fracciones utilizando el punto pasó por varios intentos hasta llegar a la que actualmente conocemos, bastante simple y funcional.

En *La Disme*, Stevin propone lo siguiente: a todo número entero se le llama *principio* y su signo es ①... Por ejemplo, el trescientos sesenta y cuatro se lee trescientos sesenta y cuatro *principios*, la escritura es de esta forma: 364①.

Stevin utilizó el signo ① para separar la parte entera del número de las fracciones de la unidad; éstas las explica de la siguiente manera: cada décima parte de la unidad del *principio* la llamamos *prima* y su signo es ①; la décima parte de la unidad de *primas* la llamamos *segunda* y su signo es ②. Y así para cada décima parte de la unidad del signo precedente, siempre en orden ascendente... Por ejemplo, 3①7②5③9④ representa 3 primas, 7 segundas, 5 terceras, 9 cuartas, y así se podría proceder infinitamente. Pero considerando sus valores, por la definición es evidente que dichos números son:

$$\frac{3}{10} \quad \frac{7}{100} \quad \frac{5}{1000} \quad \frac{9}{10000} \quad \text{que hacen} \quad \frac{3759}{10000}$$

Con el tiempo, y por problemas de tipografía y facilidad en la operación, el signo ① ideado por Stevin se convirtió en el punto decimal que utilizamos actualmente.²

La representación de las fracciones utilizando el punto pasó por varios intentos hasta llegar a la que actualmente conocemos, bastante simple y funcional. Sin embargo, a pesar de que las expresiones decimales simplificaban muchísimo la realización de los cálculos con números menores que la unidad, su uso tardó bastante en generalizarse. Fue el crecimiento del comercio, el nacimiento de los bancos y otras empresas humanas experimentadas en el siglo XVI lo que creó el ambiente que favoreció el uso de los decimales.



Actividad 4

Reflexione sobre:

El gran avance y grado de abstracción que implica la idea de que, para representar números menores que la unidad, se utilicen las nociones de *base* y *valor posicional*, separando ¡con un pequeño punto! la parte entera de la que no lo es.

² Estas referencias sobre Stevin fueron tomadas de G. Waldegg (1996).

5. Números decimales y expresiones decimales

La notación utilizando el punto es sólo una forma de representar las fracciones que surgió con el interés de facilitar los cálculos con ellas. Sin embargo, algunas fracciones son decimales y otras no. Esta precisión, y otras que haremos en seguida, ayudarán a entender mejor que no es lo mismo la notación usando el punto decimal que los números decimales.

1. Los números decimales son aquellos que pueden escribirse en forma de fracciones decimales.
2. Las fracciones decimales son las que pueden expresarse con un numerador entero y un denominador que es una potencia de diez,³ por ejemplo $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ son fracciones decimales; también son fracciones decimales $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$, ya que se pueden encontrar fracciones equivalentes a un medio y a tres quintos cuyos denominadores sean alguna potencia de 10.
3. Este tipo de fracciones tienen la particularidad de que pueden representarse de otra manera: utilizando escrituras que llevan punto decimal, dando lugar a las *expresiones decimales finitas* y que en la escuela simplemente reciben el nombre de *decimales*. A las fracciones $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{1000}$ les corresponden, respectivamente, las siguientes escrituras decimales: 0.3 y 0.001.
4. Las fracciones que no son decimales (por ejemplo $\frac{1}{3}$) no pueden representarse mediante una expresión decimal finita, este tipo de fracciones da lugar a las expresiones decimales periódicas infinitas ($\frac{1}{3} = 0.3333\dots$).
5. Ambas expresiones, decimales finitas y decimales ineridicas, forman el conjunto de los números racionales (números que pueden escribirse como fracciones),⁴ que son los que se estudian en la Educación Primaria y Secundaria.

³ Recuérdese que las potencias de 10 son, por ejemplo, $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$, $10^1 = 10$, $10^0 = 1$, etcétera.

⁴ Los números racionales son todos los números que pueden escribirse como fracciones, es decir, como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y b debe ser diferente de cero; son números racionales: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, 5, 2.1, 0.3333..., etcétera. Nótese que los números decimales son un subconjunto de los racionales.



No deben confundirse los números decimales con una de sus representaciones mediante la escritura con punto, que por ser la más práctica es la que más utilizamos.

En el nivel de Educación Primaria y Secundaria sólo se estudian las expresiones decimales que representan números racionales, son las expresiones decimales finitas y expresiones decimales infinitas periódicas. Sin embargo, es necesario insistir en que también hay expresiones decimales que no corresponden a los números racionales y que son aquellas cuya parte decimal es *infinita y no periódica*; este tipo de números se llaman irracionales. Es decir, los números irracionales también pueden expresarse de manera aproximada mediante una expresión con punto decimal pero no son números decimales porque no pueden expresarse con una fracción con denominador potencia de 10. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 puede expresarse como 1.4142135..., no obstante que lleva un punto decimal, el número no corresponde a ninguna fracción decimal.

El único número irracional que los alumnos usan en su expresión con punto decimal en la primaria y secundaria es el número π . Lo más común es que aproximemos el valor de π con unas cuantas cifras decimales: 3.14 o 3.1416, pero aunque agreguemos más cifras decimales no es posible expresar con punto decimal el valor exacto de π , debido a que, por ser irracional, el número de cifras decimales que tiene es infinito y no periódico; no obstante, para efectos prácticos es suficiente considerar su valor con la aproximación 3.1416.⁵



Actividad 5

Dé las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{10} \quad \frac{3}{20} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{3}{1000}$$

⁵ Los decimales infinitos con periodo, por ejemplo 0.12121212... sí son racionales. Son irracionales cuando son infinitos y no tienen periodo; otro ejemplo de número irracional es raíz cuadrada de 3, que aproximadamente es 1.7320508075688772935..., la parte decimal continúa de manera infinita y sin periodo. El lector podrá explorar en una calculadora otros números irracionales, como raíz cuadrada de 5, raíz cuadrada de 11, etcétera.

- a) ¿Cuáles dan lugar a expresiones decimales finitas y cuáles a expresiones decimales periódicas infinitas?
- b) ¿Cuáles de esas fracciones representan números decimales?

Una vez hechas estas diferenciaciones regresaremos a los decimales, tema central de este libro, para volver la mirada hacia el aprendizaje de los alumnos.

6. ¿Los niños entienden los decimales?

Algo sobre el concepto de decimal

En la escuela, los alumnos tienen que aprender y comprender muchos aspectos de los números decimales. Por ejemplo, que el primer lugar a la derecha del punto se refiere a los décimos, el segundo a los centésimos, el tercero a los milésimos, etcétera. Por lo regular, los alumnos memorizan sin mucha dificultad los nombres correspondientes a las distintas columnas, no obstante, hay que desconfiar un poco porque:

Saber los nombres de las columnas no indica que se comprende el valor representado en cada una de ellas.

Los décimos, los centésimos, los milésimos... son un contenido que, generalmente, pensamos que con una explicación *clara* queda entendido. Así lo expresa, por ejemplo, un profesor de sexto, grado cuya opinión anotamos a continuación:

Lo principal es que se aprendan la posición de los décimos, los centésimos y los milésimos. Cuando se aprenden esto, ya puedes trabajar la escritura y las operaciones, te vas rápido.

Al igual que este profesor, es común que nuestra preocupación sobre los decimales consista en hacer aprender los nombres de las columnas, en dictar números y en lograr que se resuelvan operaciones con destreza.



Pero las respuestas de algunos alumnos de sexto grado en relación con los números decimales ponen nuestras creencias en tela de juicio. Eso es lo que constatamos en el transcurso de una investigación que comentaremos en el siguiente capítulo.



Actividad 6

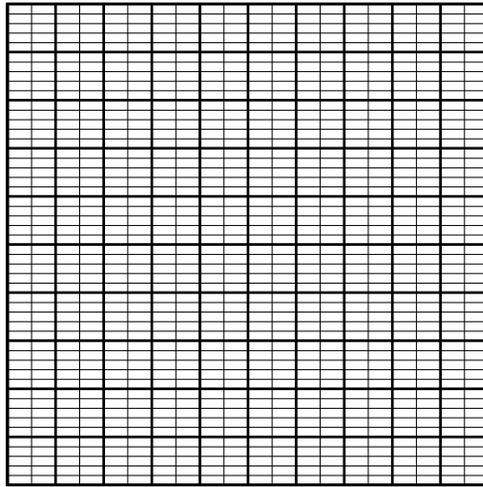
1. Responda a las siguientes preguntas.
 - a) ¿Usted ha enseñado los números decimales?
 - b) Si su respuesta es afirmativa, ¿cómo lo ha hecho?
 - c) ¿Por qué lo ha hecho así?

2. Reflexione sobre:
 - a) ¿Ha preguntado alguna vez a sus alumnos qué entienden por décimo, centésimo o milésimo?
 - b) ¿Les ha pedido alguna vez representar, mediante algún dibujo, la unidad, un décimo, un centésimo o un milésimo?
 - c) ¿Cómo imagina que los representarían?

Una mirada al aprendizaje: la noción de decimal

A Emilio, y a otros niños, les proporcionamos un cuadrado dividido en 1000 pequeños rectángulos, al que llamamos *cuadrado-unidad*, y les pedimos realizar las tareas siguientes:

- a) Representar 1 décimo y 8 décimos.
- b) Representar 1 centésimo y 12 centésimos.
- c) Representar 1 milésimo.
- d) Indicar el orden entre décimos, centésimos y milésimos.



Según Emilio, y la mayoría de sus compañeros, el orden solicitado en el inciso d) es el siguiente: *milésimo* mayor que *centésimo* mayor que *décimo*.

Siendo los interrogados niños de quinto y sexto grados, nos quedamos sorprendidos cuando recibimos esta respuesta. Por eso nos pareció importante indagar la lógica que la sustenta preguntando:

—¿Por qué crees que el mayor es el milésimo y que el menor es el décimo?

La explicación de Emilio fue la siguiente:

—Los milésimos son más grandes porque están divididos en mil, ¡son mil partes!

Las ideas de Emilio y muchos de sus compañeros son compartidas por Flor —de quinto grado—, con quien el profesor Jesús Mendoza⁶ dialogó:

Maestro: ¿Cuántas veces es más grande un décimo que un centésimo?

Flor: Ni uno porque... (*Se queda pensando.*)

Maestro: ¿Por qué?

⁶ J. Mendoza (2007).



- Flor:** Un décimo es más pequeño que un centésimo porque un décimo es de diez y un centésimo, como acá arriba, es de cien.
- Maestro:** ¿Cuántas veces es más pequeño un milésimo que un centésimo?
- Flor:** ¿Cuántas veces más pequeño?
- Maestro:** Sí, ¿cuántas veces es más pequeño un milésimo que un centésimo?
- Flor:** Ni uno.
- Maestro:** ¿Por qué?
- Flor:** Porque el milésimo es más grande que el centésimo...

Más adelante, Flor reafirma su opinión:

- Maestro:** ...entonces, ¿cuántos décimos hay en una unidad?
- Flor:** Ni uno.
- Maestro:** ¿Por qué?
- Flor:** Porque *una unidad* es más pequeña y no cabrían los décimos.

Como se ve, los niños tienen dificultades para entender que los valores representados después del punto son fracciones de la unidad. Éste es un hecho que debe tomarse en consideración para la planeación de la enseñanza.



Actividad 7

1. Reflexione sobre:
 - a) ¿Cómo puede usted interpretar las respuestas de estos alumnos?
 - b) ¿De dónde deriva la lógica con la que tratan de explicarse los decimales?
 - c) ¿Cómo cree que sus alumnos interpretan los decimales, se había imaginado que pudieran interpretarlos como Emilio y Flor?
 - d) ¿Cree usted que la enseñanza influye en la forma en que los niños interpretan los decimales? ¿Podría dar un ejemplo?
2. Realice con sus alumnos la actividad que realizaron Emilio y sus compañeros. Trate de obtener los porqués de sus respuestas.

7. Un mismo número, diferentes representaciones

En general, los números pueden representarse de distintas maneras. Veamos algunas correspondientes al ocho:

$$8 = \frac{16}{2} = 10 - 2 = 8.00000 = 2 + 6 = 2 \times 4 = \frac{80}{10}$$

Esto también es válido para los números decimales. Así, un mismo número decimal puede representarse de distintas maneras, por ejemplo:

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \frac{500}{1000} = \frac{5000}{10000} = \dots$$

O bien:

$$0.5 = 0.50 = 0.500 = 0.5000 = 0.50000 = \dots$$

Este conocimiento permite comprender y utilizar una propiedad muy útil e importante de los números decimales:

Después de la última cifra significativa a la derecha del punto decimal pueden agregarse ceros sin que el decimal cambie de valor.

Cuando los alumnos comprenden la idea anterior tienen mayores posibilidades de enfrentar con éxito diversas tareas relacionadas con los decimales. Por ejemplo:

- a) Compararlos.
- b) Sumar o restar, ya que pueden completar con ceros la parte decimal, alinear el punto y resolver la operación.
- c) Intercalar decimales entre otros dos, por ejemplo 2.5 y 2.6, ya que es útil considerar a estos decimales como 2.50 y 2.60, de ahí la respuesta puede ser 2.51, 2.52, 2.53, etcétera.
- d) Hacer aproximaciones a décimos, centésimos... al resolver divisiones en las que el dividendo no es múltiplo del divisor.



También es importante trabajar con los alumnos la equivalencia entre expresiones fraccionarias y expresiones decimales de un número. Por ejemplo:

¿Cuál es la expresión con punto decimal de la fracción $\frac{3}{8}$?

Una manera de dar respuesta a la pregunta anterior es buscando una fracción equivalente con denominador potencia de 10:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0.375$$

Otra manera es interpretando la fracción como cociente y, al hacer la división $3 \div 8$, se obtiene 0.375. Esta manera de interpretar las fracciones implica conocimientos más complejos: la división como fracción y la división con cociente decimal.



Actividad 8

- a) Anote tres representaciones diferentes para cada uno de los siguientes números:

$$\frac{3}{4} \quad 0.25 \quad \frac{3}{7} \quad 100.1 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{5}{11}$$

¿Cuáles de estos números son decimales?

- b) En seguida se presentan varias fracciones decimales. Anote para cada una al menos tres fracciones equivalentes con denominador 10, 100, 1000...

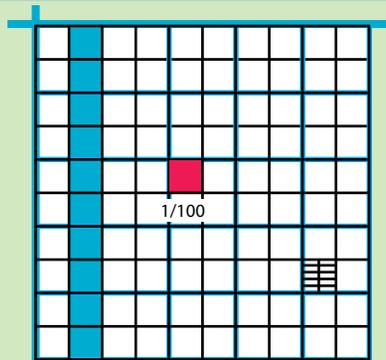
$$\frac{3}{4} \quad \frac{2}{16} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{3}{2}$$

- c) Encuentre al menos tres números decimales que se ubiquen entre:

8 y 9
8.1 y 8.2
8.101 y 8.102

En la posibilidad de representar los decimales de diversas maneras subyace la noción de *equivalencia*. Construir la noción de equivalencia entre decimales es una tarea compleja; la dificultad se agudiza cuando los alumnos no tienen una comprensión amplia de lo que son las fracciones decimales. Es importante entonces trabajar actividades que favorezcan dicha comprensión, incluyendo situaciones que les permitan comprender las relaciones entre décimos, centésimos, milésimos... Actividades como la que se incluye en seguida —tomada y adaptada de un libro de texto gratuito— pueden ser útiles para tal fin.

¿Cuántos centésimos y milésimos?



Responde las siguientes preguntas. Si necesitas, apóyate en el rectángulo que aparece arriba. Considera que representa una unidad.

¿Qué es más grande, un décimo o un centésimo?

¿Cuántas veces cabe un décimo en la unidad?, ¿y un centésimo?, ¿y un milésimo?

¿Por qué crees que el décimo se llama así?

¿Cuántas veces cabe un centésimo en un décimo?

¿Qué parte de un décimo es un centésimo?

¿Qué parte de un centésimo es un milésimo?, ¿y un décimo?

Fue el crecimiento del comercio, el nacimiento de los bancos y otras empresas humanas experimentadas en el siglo XVI lo que creó el ambiente que favoreció el uso de los decimales.

⁷ Actividad tomada y adaptada de A. Ávila, H. Balbuena, I. Fuenlabrada y G. Waldegg (2000).



Las anteriores son algunas de entre muchas preguntas que el maestro puede proponer para guiar la construcción de los conceptos y el establecimiento de las relaciones que interesa promover.



Actividad 9

- a) La actividad del libro de texto incluida arriba tiene por objetivo que los alumnos establezcan equivalencias entre décimos, centésimos y milésimos, contando con un apoyo visual. Analízela considerando lo siguiente:
 - ¿Qué importancia tiene el uso del rectángulo-unidad?
 - Algunas preguntas tienen como propósito que los alumnos relacionen el *tamaño* relativo de los décimos, centésimos y milésimos, ¿qué valor didáctico tienen esas preguntas?
 - ¿Es importante que se trate de explicitar la relación de los décimos, centésimos... con la unidad?
 - ¿En qué grado o grados le parece pertinente aplicar esta actividad?
 - ¿Qué cambios sugeriría o qué ejercicios agregaría para enriquecer la actividad?
- b) Diseñe, con base en el rectángulo-unidad, una actividad problemática que permita a los alumnos utilizar la equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.

Una mirada a la enseñanza

El siguiente es un fragmento de una clase de quinto grado de primaria en el que la profesora trata de hacer comprender a sus alumnos algunos aspectos de los números decimales.

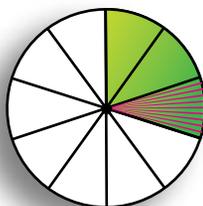
Los niños están dibujando dos círculos y luego los dividen en 10 partes iguales para representar décimos; la maestra también ha dibujado en el pizarrón y además ha dividido un décimo en 10 partes, que vienen a ser centésimos de la unidad.

- Maestra:** Bien, como ya terminaron, listos acá al pizarrón. ¿Listos?
- Alumno:** Sí.
- Maestra:** Si aquí lo dividimos en diez pedacitos (*señala el décimo dividido en 10 partes*), ¿a cuántas personas?, porque acuérdense que es un pastel, ¿a cuántas personas les podemos dar si dividimos todos los décimos en diez pedacitos?
- Alumno:** A cien personas.
- Maestra:** Dice su compañera a cien, también acá dicen a cien.
- Alumno:** A cien, a cien.
- Alumnos:** Sí, sí, sí.
- Maestra:** ¿Por qué?
- Alumno:** Porque se dividiría en cien.
- Maestra:** A ver, contamos...
- Alumnos:** Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa y cien.
- Maestra:** Ah, le podemos dar a cien, porque lo... Oigan ¿y qué será más, que me den un pedacito de aquí o que me den un décimo?
- Alumnos:** ¡Un décimo!
- Maestra:** Ah bueno, cuando vamos a dividir en cien pedacitos iguales ¿le vamos a llamar...? ¿Alguien sabe cómo se le llama? Porque a éstos se les llama décimos, pero ahora...
- Alumno:** Centésimos.
- Maestra:** Centésimos, dice su compañero, pues le ponemos aquí centésimos para que no se nos vaya a olvidar. Centésimos, cuando el entero se dividió ¿en cuántos?
- Alumno:** En cien.
- Maestra:** Ahora, sin dividirlo, porque ustedes ya saben que cada uno va dividido en diez, ¿cómo iluminarían ustedes?, fíjense bien, listos, $\frac{30}{100}$, a ver, ilumínenme $\frac{30}{100}$.

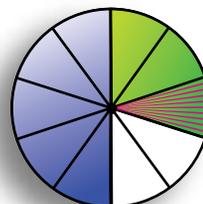


Los decimales: más que una escritura

Los niños iluminan y luego iluminan también 50/100.



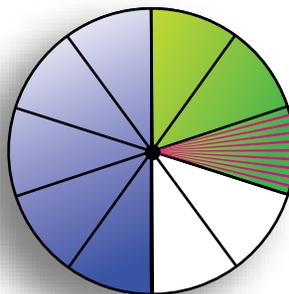
$$= \frac{30}{100}$$



$$= \frac{50}{100}$$

Maestra: Ahora voy a coger una partecita de éstas (*señala un centésimo*), ¿cuántas teníamos aquí?, ¿en los centésimos?

Alumno: Cien.

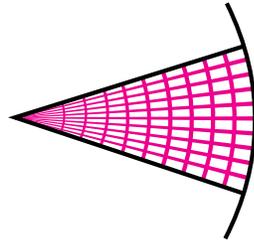


Maestra: Cien, a esta partecita la voy a dividir en diez pedacitos chiquitos, claro que aquí me quedaría bien amontonado porque está muy chiquito, necesitaría ser una cosa más grande, pero si se puede dividir en diez pedacitos chiquitos, se va haciendo, fíjense el décimo más grande, el centésimo...

Alumno: Más chiquito.

Maestra: Más chiquito, y ahora si agarramos un pedacito de éstos (*señala*

el centésimo) y lo dividimos en diez (*lo hace*), dice su compañera, ¿cómo lo llamaríamos?



Alumno: Milésimo.

Maestra: Milésimo, quiere decir que ¿cuántas partes va a tener el pastel?
¿Para cuántas personas va a ser?

Alumno: Cien.

Alumno: Para cien mil.

Maestra: Para cien serían centésimos, pero ahora van a ser mil.

La clase termina por ese día y en la próxima sesión la maestra continúa con la partición decimal, sólo que ese día la unidad es cuadrada.

Nos parece que la maestra ha planeado su clase como si conociera las dificultades que los niños tienen para entender los decimales. Sin embargo, encontramos en su acción elementos favorables y algunos otros que pueden mejorarse.



Actividad 10

1. Reflexione:

- ¿Cuál es el objetivo o los objetivos de la clase?
- ¿Qué aspectos de los decimales aborda la maestra?
- ¿Considera usted que de esta manera se ayuda a los niños a rebasar las ideas que se comentaron en el apartado *Una mirada al aprendizaje: la noción de decimal* de la página 36?
- ¿Qué aspectos encuentra usted como fortalezas de la clase?
- ¿Qué aspectos considera que son debilidades de la clase?



2. Elabore un plan de clase para trabajar el mismo objetivo que la maestra, a partir de la situación planteada por ella, pero mejorando las que haya identificado como debilidades de la clase.

8. Orden en los números decimales

Los decimales tienen propiedades que los diferencian de los naturales. Una muy importante es la forma de estar ordenados. Las siguientes actividades permitirán profundizar sobre este tema.



Actividad 11

a) ¿Cuál número es mayor en cada pareja?:

1003, 1030 111, 11 2400, 24000 3040, 3104

b) ¿Qué conclusión puede obtenerse en relación con el número de cifras y el orden en los naturales?

c) ¿Cuál es el antecesor y el sucesor de cada uno de los siguientes números?

2009 400 9000 100 000

d) ¿Cuál número es mayor en cada pareja?:

0.5, 0.125 0.1, 0.35 3.2, 3.20
3.3450, 3.9 2.8, 1.97 0.3765, 0.8

e) ¿Qué conclusión puede obtenerse en relación con el número de cifras y el orden de los decimales?

Veamos ahora las respuestas correctas a dos de las preguntas que anotamos al inicio de este libro, en el apartado *¿Qué son los números decimales?*:

- ¿Cuál número es el antecesor de 1.75?

Respuesta: 1.75 no tiene antecesor

- Subraya el número que es mayor entre 5.18 y 5.6:

Respuesta: 5.6



Actividad 12

- a) Anote tres diferencias que identifique entre los números naturales y los decimales.
- b) ¿Qué papel juegan en las respuestas de los alumnos los conocimientos sobre los números naturales que han adquirido y utilizado a lo largo de su Educación Primaria?

En los decimales, el número de cifras no es relevante como elemento para definir el orden.

Al comparar, por ejemplo, 0.5 y 0.134 se están comparando décimos (5) con milésimos (134) y, aunque el 134 tenga más cifras, la cantidad que representa es menor que 5 décimos. Una manera de facilitar la comparación es igualar el número de cifras decimales de las dos cantidades que se están comparando, para ello es importante recordar que $0.5 = 0.50 = 0.500 = 0.5000$, etcétera. Así, comparar 0.5 y 0.134 es lo mismo que comparar 0.500 y 0.134 y en esta última pareja es claro que 500 milésimos es mayor que 134 milésimos.

En los decimales, al igual que en el conjunto de los racionales, no hay ni antecesor ni sucesor.



En los números decimales no tiene sentido hablar de sucesor o antecesor porque no podemos asegurar que un número sigue o antecede a otro. Considérese, por ejemplo, 0.5 y reflexiónese lo siguiente: no se puede afirmar que el sucesor de 0.5 es 0.6 porque 0.5 equivale a 0.50 y en este caso se podría pensar que el sucesor, entonces, es 0.51; pero también $0.5 = 0.500$ y entonces el sucesor sería 0.501, y así se podría mostrar que hay un número infinito de sucesores, lo que equivale a decir que el sucesor de un número decimal no está definido. Una reflexión igual puede hacerse con el antecesor.

Una mirada a la enseñanza

Los décimos, los centésimos, los milésimos... son un contenido que, generalmente, pensamos que con una explicación clara queda entendido. Pero las respuestas equivocadas de algunos alumnos de sexto grado ponen nuestras creencias en tela de juicio.

A continuación se expone un fragmento de lo ocurrido en un grupo de cuarto grado de primaria, mientras se desarrollaba una clase acerca de los números decimales.

La maestra, de cuarto grado, hace un cuadro en el pizarrón en el que anota los resultados de una competencia de natación:

País	Tiempo	Lugar
Cuba	18.19 minutos	
México	18.30 minutos	
Rusia	18.2 minutos	
Alemania	18.177 minutos	
Canadá	18.030 minutos	
Suecia	18.09 minutos	

Maestra: En equipo, no es solos, discutan, platiquen, peléense... ¿Cuál es el país que ocupa el primer lugar, el que hizo menos tiempo?, ¿el segundo lugar?, ¿el tercer lugar?, hasta el sexto lugar.

Niño: ¿Qué vamos a poner?

Maestra: El lugar; el que hace menos tiempo es primer lugar.

Otro niño: ¡Rusia es el que hizo menos, es el primer lugar!

Maestra: Como son 18 enteros, no nos vamos a dar cuenta de quién hizo menos tiempo. ¿Cómo nos vamos a dar cuenta? Nos vamos a

pasar a los números decimales comparando primeramente los décimos

Otro niño: ¡Rusia!

Maestra: Nada más les estoy dando una pista comparando, o sea, más bien las centésimas de cada uno, si primeramente comparamos las décimas, si todas las décimas son iguales, entonces nos pasamos a las centésimas para comparar de esta manera. ¿Qué país ocupó el primer lugar?

Niño: (*Insiste.*) Rusia. (*La maestra no lo atiende.*)

Un equipo, a solicitud de la maestra, da el resultado de su ordenación: Rusia, primer lugar.

Un niño de otro equipo grita: No, primer lugar Suecia.

El grupo parece dividido: unos opinan que Suecia, otros que Rusia...

Más adelante, la maestra interviene.

Maestra: Fíjense bien, les dije que compararíamos primeramente las décimas, ustedes dicen que el segundo lugar es Canadá, si las décimas son iguales nos vamos a pasar a las centésimas. ¿Quién hizo menos tiempo, Suecia o Canadá?

Los niños hablan a la vez.

Maestra: ¿Cuál es el más grande, el tres o el nueve?

Alumnos: El nueve.

Maestra: Entonces, ¿quién hizo más tiempo?

Alumnos: Canadá.

Maestra: Canadá, está visto que el tres es más chico que el nueve. Entonces hizo menos tiempo Canadá. De esta forma vamos a ir comparando. Vamos a corregir aquí: ¿cuál es el primer lugar, Canadá o Suecia?

Alumnos: Canadá.

Niño: ¡No, porque Suecia hizo 9, y en Canadá son 30!...



Actividad 13

¿Qué contenido o contenidos sobre los decimales están en juego en este episodio?

- a) ¿Cuál es la lógica subyacente en las respuestas de los niños que consideran que Rusia obtuvo el primer lugar?
- b) ¿Qué opinión le merecen las intervenciones de la maestra para tratar de que sus alumnos den las respuestas correctas?
- c) ¿Usted qué haría si fuera el profesor, cuando:
 - El alumno insiste: el primer lugar es Rusia.
 - El alumno dice: ¡no, porque Suecia hizo 9, y en Canadá son 30!
- d) ¿Si usted fuera el profesor o la profesora del grupo, ¿qué actividades habría realizado antes de plantear la actividad sobre el cuadro de los tiempos deportivos para asegurarse de que la mayor parte de los niños lo entendieran?

9. La propiedad de densidad

Los niños tienden a interpretar los decimales desde la lógica de los naturales. Los conocimientos que han construido sobre estos números son conocimientos que tienen muy arraigados y con base en ellos buscan interpretar los números decimales. Es probable que la forma en que habitualmente enseñamos los decimales también contribuya a la poca diferenciación que los niños hacen entre unos y otros números.

Pero vayamos de nuevo a nuestras preguntas iniciales y veamos la respuesta a la siguiente:

- Escribe un número que vaya entre 0.25 y 0.26

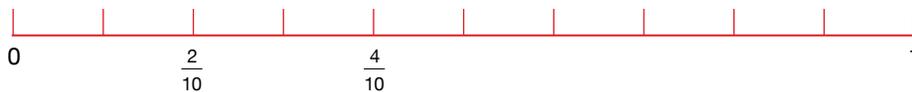
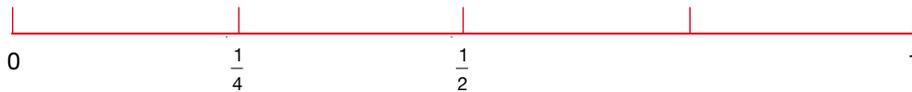
Respuesta: *0.251, pero podría haber muchos otros*

En efecto, como se vio anteriormente, los números 0.25 y 0.26 pueden expresarse como 0.250 y 0.260; bajo esta consideración es fácil determinar que entre estos dos decimales están 0.251, 0.252, 0.253, etcétera; pero los números dados se pueden expresar también como 0.2500 y 0.2600, entre esos dos se puede ver que están 0.2501, 0.2502, 0.2503, etcétera. Es decir que hay una infinidad de números entre .25 y .26.



Actividad 14

- Calcule el promedio de las dos fracciones que aparecen en cada una de las rectas, sumándolas y luego dividiendo entre dos el resultado.
- Coloque el resultado en el punto correspondiente sobre la recta.
- Calcule el promedio de la primera fracción y la que haya obtenido como promedio en el inciso a) y coloque el resultado en el punto correspondiente de la recta.
- Repita la operación al menos 5 veces.



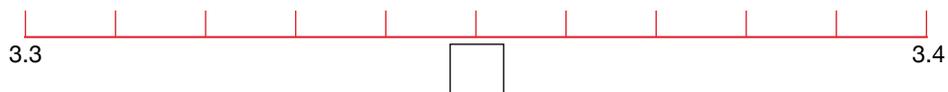
- ¿Qué conclusiones puede obtener?

Entre dos decimales siempre es posible incorporar otro decimal, esto se conoce como la propiedad de densidad de los decimales (válida para todos los racionales).

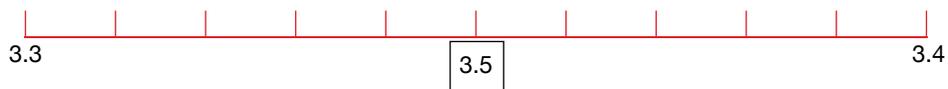


Una mirada al aprendizaje

¿Qué número debe ir en el cuadrado?



Lo más probable es que los niños o los jóvenes de secundaria no tengan conocimientos suficientes para responder correctamente esta pregunta. Pero los niños son inteligentes y, aun sin tener los conocimientos previos suficientes, dar las respuestas correctas, siempre tratan de entender y generan una lógica con la que producen respuestas. Por ejemplo Ariel, quien respondió así:



dice que la respuesta correcta es 3.5 porque el punto *está en la mitad, y en la mitad siempre es .5... o también $\frac{1}{2}$.*

Pero Velia, una de las más hábiles con los decimales en su grupo de sexto, realmente nos sorprende cuando dice que *No se puede responder, porque iría 3.3.5 y no se puede con dos puntos decimales.*

Investigadora: ¿Entonces?

Velia: Sólo sería $3.3\frac{1}{2}$.

Investigadora: ¿Y por qué crees que así sí está bien?

Velia: Porque no se pueden poner dos puntos.

Investigadora: ¿Por qué crees que no se puede con dos puntos?

Velia: Porque supongamos que es una suma, y viene 3.0.4, y la otra viene 3.4, supongamos (*anota en el papel*):

3.4

3.0.4

Ya no se puede, porque ¿dónde se pondría [una vez hecha la operación] este punto que está aquí? (señala el segundo punto de 3.0.4).

Como podemos apreciar, Velia ha construido toda una lógica —bien coherente, por cierto— para construir su respuesta y evadir el problema de los dos puntos decimales, cuya presencia haría imposible colocar correctamente el punto en el resultado.

¿En qué radica la dificultad de este tipo de reactivos? Lo explicamos en seguida, empezaremos señalando los conocimientos que se hacen necesarios para interpretarlos y responderlos adecuadamente:

1. Que los números 3.3 décimos y 3.4 corresponden a puntos sobre la recta.
2. Que hay 10 centésimos entre 3.3 y 3.4.
3. Que 3.3 es equivalente a 3.30 y 3.4 es equivalente a 3.40 (también son equivalentes a 3.300... y 3.400... pero para responder a la pregunta esto ya no es necesario).
4. Que en los decimales es posible *que vaya* un número de dos, tres o más cifras decimales entre dos números de una cifra decimal.

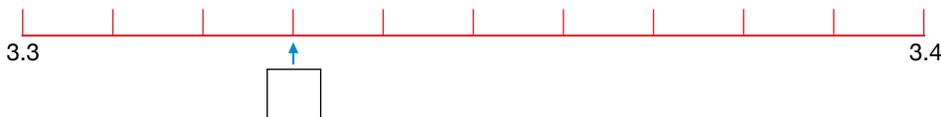
En los números decimales no tiene sentido hablar de sucesor o antecesor porque no podemos asegurar que un número sigue o antecede a otro.

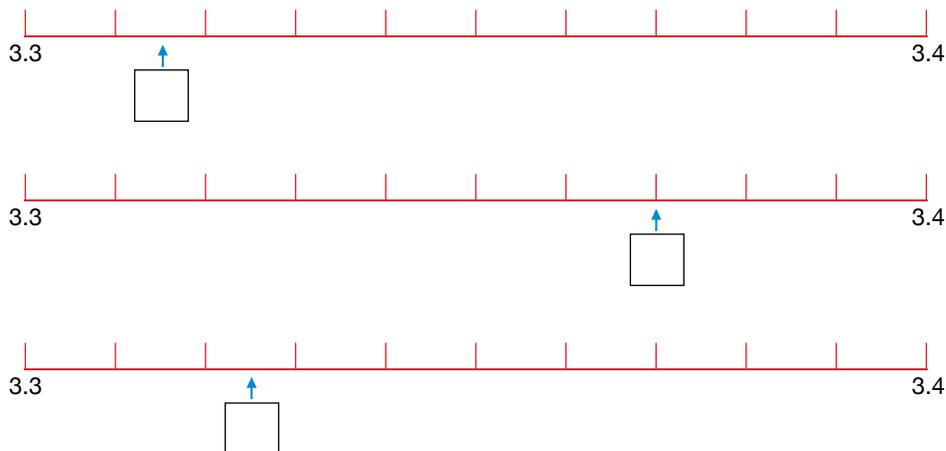
Así pues, la respuesta a preguntas de este tipo es producto de algo más que contar las divisiones sobre la recta; dar una respuesta correcta implica poner en juego diversos conocimientos sobre el orden, la equivalencia y la representación de los números decimales. Una buena articulación de dichos conocimientos hace necesario dedicarle tiempo de enseñanza y de aprendizaje.



Actividad 15

- a) Anote los números que correspondan a los puntos señalados.





- b) ¿Qué contenidos se trabajan en el ejercicio anterior?
- c) Ordene por grado de dificultad las rectas y argumente su ordenación.

10. Los decimales: más que una escritura

Hemos visto que una notación con punto decimal y número decimal no son sinónimos. Por un lado, un número decimal puede expresarse con punto decimal pero también tiene otras expresiones; por otro lado, no todas las expresiones numéricas que tienen un punto decimal corresponden a un número decimal. Julia Centeno, una profesora española dedicada a estudiar los números decimales y las dificultades de su enseñanza, nos previno respecto a esta posible confusión:

Debemos distinguir bien cuando hablamos de un número y cuando nos referimos a una de sus diversas formas de representarlo. Hablamos de un número cuando nos ocupamos de su función, de los problemas que permite resolver o de las propiedades que le distinguen de otras clases de números.⁸

⁸ Centeno (1997).

La advertencia anterior tiene especial relevancia para el caso de los números decimales. Pero, tradicionalmente, la enseñanza del concepto de número decimal ha dejado fuera estas reflexiones y se ha limitado, creemos que erróneamente, sólo a enseñar a los alumnos la lectura y escritura, mostrándoles los nombres de los números que aparecen después del punto y que representan fracciones de la unidad.

Ésta es una costumbre escolar antigua, lo podemos ver en muchos libros de texto de hace cincuenta o sesenta años. En éstos se incluían explicaciones y esquemas como el siguiente:

Lección A

Nuestro sistema de numeración es decimal. Cada cifra colocada a la derecha de otra es de un orden 10 veces inferior a la que le antecede. Así, el 8 escrito a la izquierda del punto es 10 veces mayor que el 8 situado a la derecha. El primero representa unidades y el segundo décimos.

8 8 8 8 . 8 8 8 8

Unidades de millar	↑	↓	diezmilésimos
Centenas	↑	↓	milésimos
Decenas	↑	↓	centésimos
Unidades	↑	↓	décimos ⁹

La enseñanza centrada en la tabla de posiciones –aún muy utilizada en las escuelas– ofrece pocos elementos para la comprensión de los decimales, porque se centra en los símbolos y las reglas de representación. Y a los símbolos hay que asociarles significado, si no, estarán vacíos de sentido.

⁹ Virgen Sánchez (1960), pp. 60.



Lección B

En los años setenta del siglo pasado se incorporaron algunas innovaciones a las lecciones sobre números decimales. Ponemos en seguida un ejemplo:

En el libro se ha trabajado, brevemente, la equivalencia entre fracciones como $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{10}$, o $\frac{133}{500}$ y $\frac{266}{1000}$. Luego se presenta la siguiente suma, relacionándola con la escritura con punto decimal:

$$(3+1) + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} = 4 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$$

Cuatro unidades + una décima + seis centésimas + cinco milésimas que podemos escribir 4.165

Se incluye después una breve explicación sobre la escritura utilizando el punto, y es esto lo que nos interesa resaltar:

Usando el sistema decimal, ahora podemos representar valores menores que la unidad.

El punto que hemos escrito para separar los enteros de las fracciones decimales se llama punto decimal.

Observa que:

- El primer número escrito a la derecha del punto representa décimas.
- El segundo número escrito a la derecha del punto representa centésimas.
- El tercer número escrito a la derecha del punto representa milésimas.

Si escribimos los tres primeros lugares a la derecha e izquierda del punto, tendremos:

centenas	decenas	unidades	.	décimos	centésimos	milésimos
----------	---------	----------	---	---------	------------	-----------

825.136 es igual a ocho centenas + dos decenas + cinco unidades + una décima + tres centésimas + seis milésimas

O también:

$$825.136 = 800 + 20 + 5 + 0.1 + 0.03 + 0.006$$



Actividad 16

1. Reflexione:
 - a) ¿En qué ayuda el nombre de la posición para el aprendizaje de los números decimales?
 - b) ¿Es útil vincular las expresiones decimales usando el punto con la representación de los números decimales como fracciones? ¿Por qué?
2. Analice las lecciones A y B y anote después:
 - a) Las diferencias entre uno y otro enfoques.
 - b) Los avances que implica la propuesta B en relación con la A, en cuanto a la comprensión de los decimales que favorece.

Los niños tienden a interpretar los decimales desde la lógica de los naturales. Los conocimientos que han construido sobre estos números son conocimientos que tienen muy arraigados y con base en él buscan interpretar los números decimales.

Una mirada a la enseñanza

En seguida se anotan varias opiniones vertidas por profesores de quinto y sexto grados de primaria en relación con la dificultad de los números decimales. Léalas con cuidado y luego conteste lo que se le pide.

- *Los decimales no tienen dificultad, porque nada más se trata de seguir la misma lógica del sistema decimal, sólo que después del punto. Samuel.*
- *Se necesita más lógica para entender numerador y denominador, los niños se confunden mucho con eso; en cambio, los decimales, como ya nada más es la transformación, o sea, la equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos, es más sencillo. Elena.*
- *Lo más difícil de los decimales es la ubicación del punto. Memorizar el valor posicional. Ubicación del cero antes y después del punto decimal. Leticia.*
- *Comprender que un entero se puede dividir. La conversión de enteros a fracciones y viceversa. Las equivalencias entre décimos, centésimos y milésimos. Efraín.*

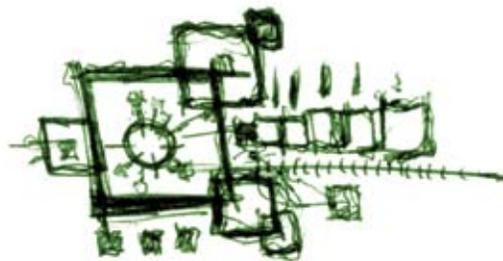


- *Son difíciles: cuando se comparan números decimales, los equiparan a los números enteros, por ejemplo: $.125$ es mayor que $.2$. Blanca.*



Actividad 17

- a) ¿Comparte usted la opinión de la maestra Elena?, ¿y de los otros colegas? ¿En qué sí y en qué no? Imagine que usted está participando en un debate con los profesores Elena, Samuel, Leticia, Blanca y Efraín, ¿qué le respondería a cada uno de ellos?
- b) En los programas y libros de texto del último medio siglo en México, los objetivos centrales de la enseñanza de los decimales fueron los siguientes: leer y escribir números decimales y realizar operaciones que los impliquen. ¿Qué puede decir al respecto?
- c) ¿Qué deberían aprender los estudiantes sobre los decimales en la Educación Básica? Haga una lista de los aspectos de estos números que considere deben atenderse durante la Educación Primaria y Secundaria para lograr una comprensión amplia de los mismos. Luego, trate de ordenarlos conforme usted crea que deben ser abordados.





Los problemas y el cálculo con los números decimales



1. Los problemas en el aprendizaje de los números decimales

Vimos en la primera parte de este trabajo que los números decimales se comportan de una manera diferente que los naturales, esto también tiene consecuencias al trabajar con problemas. Dado que las cifras escritas a la derecha del punto denotan una cantidad menor que la unidad, sólo tendrá sentido usar números decimales con ciertas cantidades, como: 5.5 metros, 2.4 kilogramos, 3.2 metros cuadrados, 12.25 litros, 100.75 centímetros cúbicos, 4.50 pesos e incluso horas, puesto que, por ejemplo, 3.5 horas se interpreta como 3 horas con 30 minutos; pero no es posible operar con decimales si se trata de cantidades que no pueden fraccionarse, por ejemplo, 5.4 canicas, 2.2 gallinas o 3.8 niños. Es decir que para plantear problemas con números decimales se deben elegir contextos en los que las cantidades expresadas con estos números tengan sentido.

Un ejemplo de la importancia del contexto lo constituyen algunos problemas que se resuelven con una división. Por ejemplo:

- Repartir 18 dulces entre 3 niños, de tal manera que todos reciban lo mismo y no sobre nada.

Este tipo de problemas pierde sentido si el divisor es un número decimal, ¿qué significaría repartir entre 3.5 niños? No obstante, existen problemas que dan lugar a una división y en los que los números decimales tienen sentido. Por ejemplo:

- Para hacer un moño, Araceli ocupa 1.5 metros de listón, ¿para cuántos moños le alcanzan 210 metros de listón?

Para plantear problemas con números decimales se deben elegir contextos en los que las cantidades expresadas con estos números tengan sentido.



Las operaciones aritméticas cobran significado por los problemas que resuelven. La enseñanza de las operaciones implica no sólo que los alumnos aprendan a resolverlas sino, y quizás sobre todo, que sepan cuándo usarlas. Esta observación, como veremos en seguida, tiene especial relevancia en el caso de los decimales.



Actividad 18

Invente un problema para cada una de las siguientes operaciones:

$$5.5 + 3.5$$

$$3.5 \times 2.5$$

$$14 \div 3.5$$

Una mirada al aprendizaje

Los siguientes problemas fueron inventados por alumnos de segundo de secundaria cuando se les propuso que, dada una operación, escribieran un problema que se resolviera con ella.

Para la operación $5.5 + 1.5$, algunos de los problemas propuestos fueron:

- Raúl tiene 5.5 estampas y gana 1.5, ¿cuántas estampas tiene Raúl?
- Un niño tenía 5.50 pesos y su papá le regaló 1.50, ¿cuánto dinero tiene ahora?
- Un señor va a comer 5.5 pescados y sobraron 1.5 pescados, ¿cuántos pescados eran?
- En la tienda de don Juan va Pedro a comprar unas galletas que cuestan 7 pesos y sólo tiene 5.5 pesos, pero Juan le presta 1.5 pesos. ¿Cuánto cuestan las galletas?

Para la operación 3.5×2.5 , algunos alumnos propusieron:

- Un niño tiene 3.5 canicas por 2.5 que le regaló un señor, ¿cuánto tiene de canicas?
- Un señor quiere comprar tela, cada metro cuesta 3.5 pesos y él quiere comprar 2.5 metros, ¿cuánto va a pagar?

II. Los problemas y el cálculo con los números decimales

- Laura fue a comprar una paleta que cuesta 3.5 pesos y compró 2.5 paletas, ¿cuánto se gastó?
- Un niño jugó una rifa y ganó 3 juguetes y medio y como ganó la rifa se lo multiplicaron y le dieron 2 muñecos y medio, ¿cuántos juguetes le dieron? (Cabe mencionar que el resultado que dio este alumno al problema que planteó fue: 8 juguetes con 75 cabezas.)

Finalmente, para la operación $14 \div 3.5$, algunos problemas fueron:

- El día del niño una señora va a repartir 14 juguetes a 3.5 niños, ¿de a cómo les toca?
- Juanita compró 14 kilos de queso y lo va a repartir entre 3 hijos y una bebé, ¿cuánto le toca a cada uno?
- María tiene un pastel de 3.5 y lo quiere repartir a 14 personas, ¿a cuántos cachos de pastel le toca a cada una?
- Una maestra le preguntó a un alumno cuántas veces cabía el 3.5 en el 14.
- Un niño fue a comprar 14 kilos de pollo y lo metieron en cajas, a cada una de las cajas le puso 3.5, ¿cuántas cajas ocupó?



Actividad 19

Identifique:

- a) Problemas correctos.
- b) Problemas correctos porque se resuelven con la operación pero absurdos por los datos involucrados.
- c) Problemas que denotan concepciones erróneas de los decimales.
- d) Problemas que denotan concepciones erróneas de las operaciones.

2. Resolución de problemas con números decimales

Como ya se mencionó, el sentido y la funcionalidad de una operación lo da el tipo de problemas que resuelve, de ahí la importancia de que –al igual que con los números naturales o las fracciones– las operaciones con decimales se



trabajen a través de la resolución de problemas. Es importante que primero se planteen problemas a los alumnos y que ellos los resuelvan con procedimientos propios, informales, no convencionales, ya después el maestro se encargará de enseñar los procedimientos y algoritmos formales.

Por ejemplo, antes de que los alumnos sepan cómo se hace una multiplicación de decimales, se les puede plantear el siguiente problema:

- Carlos compró 3.5 kilogramos de manzanas, si cada kilogramo cuesta 24 pesos, ¿cuánto pagó?

Este problema puede ser resuelto con la multiplicación 24×3.5 , sin embargo, suponiendo que el alumno aún no sabe multiplicar números decimales, ¿tendrá herramientas para resolver este problema? Evidentemente que sí, si el alumno sabe interpretar que 3.5 son tres kilogramos y medio, entonces puede calcular el precio de tres kilogramos, luego el de medio kilogramo y después sumar los dos resultados:

- Tres kilogramos: \$ 72
- Medio kilogramo: \$ 12
- 3.5 kilogramos: \$ 72 + \$ 12 = \$ 84



Actividad 20

Resuelva los siguientes problemas. (NO debe usar el algoritmo convencional de la multiplicación pero sí puede hacer cálculos escritos.)

- a) ¿Cuánto se pagará por 2.75 kg de manzanas si el kilogramo cuesta 24 pesos?
- b) ¿Cuánto se pagará por 5.5 kg de naranjas si el kilogramo cuesta 7.50 pesos?
- c) ¿Cuál es el área de un rectángulo que mide 4.8 cm por 1.25 cm?
- d) ¿Cuál es el resultado de 1.1×2.5 ?

II. Los problemas y el cálculo con los números decimales

Es posible resolver los problemas anteriores sin necesidad de usar el algoritmo convencional de la multiplicación, para ello es importante saber interpretar qué significa multiplicar una cantidad por otra, por ejemplo, 1.1: tomar una vez esa cantidad más una décima parte de esa misma cantidad. También es posible que los alumnos resuelvan problemas de división con números decimales antes de que aprendan el algoritmo de esa operación. Por ejemplo:

- De una pieza de 20 metros de listón, Luis corta tramos de 2.5 metros, ¿cuántos tramos salen de la pieza de listón?

El problema anterior puede resolverse de varias maneras:

- Sumando $2.5 + 2.5 + 2.5 + \dots$ hasta llegar al 20 o al número más cercano, *sin pasarse*. El número de veces que pudo sumarse el número es el resultado.
- Restando repetidamente el 2.5: $20 - 2.5 = 17.5$; $17.5 - 2.25 = 15\dots$ hasta que ya no sea posible hacer la resta (con números positivos). El número de veces que se restó 2.5 es el resultado.
- Buscando, por ensayo y error, un número que multiplicado por 2.5 dé un resultado igual a 20 o lo más cercano posible a 20, *sin pasarse*.

Una de las grandes ventajas de los números decimales sobre las fracciones comunes es la relativa facilidad con la que se puede operar con ellos.

Si se les permite, los alumnos usarán procedimientos propios en la resolución de problemas. Quizás al principio éstos sean poco eficientes, pero pueden evolucionar hasta llegar al uso del algoritmo convencional.

3. El cálculo con decimales desde la historia

En su libro *De Thiende* o *La Disme* publicado en 1585 y que ya hemos mencionado, Simon Stevin agregó como subtítulo: *Enseña cómo todos los cálculos que se presentan en los negocios pueden realizarse con enteros solamente, sin ayuda de fracciones.*

En efecto, una de las grandes ventajas de los números decimales sobre las fracciones comunes es la relativa facilidad con la que se puede operar con



ellos; los algoritmos son los mismos que para los números naturales, agregando sólo una dificultad: decidir dónde colocar el punto decimal en el resultado.

En la segunda parte de *La Disme*, Stevin da las reglas para realizar las cuatro operaciones básicas con números decimales. La estructura que sigue es la misma para cada una: resuelve una operación y luego demuestra que está bien resuelta. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{0} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \\
 27847 \\
 37675 \\
 875782 \\
 \hline
 941304
 \end{array}$$

Donne somme (par le 1^{er} probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941⁰3¹0²4³. Je di, que les mesmes sont la somme requise. Demonstration. Les 27⁰8¹4²7³ donnez, sont (par la 3^e definition) $27 \frac{8}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$, ensemble $27 \frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37⁰6¹7²5³ valent $37 \frac{675}{1000}$, & les 875⁰7¹8²2³ feront $875 \frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27 \frac{847}{1000} + 37 \frac{675}{1000} + 875 \frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10^e probleme de l'Arith.) $941 \frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941⁰3¹0²4³, c'est

Stevin indica que la suma se realiza como si fueran números enteros y demuestra que el resultado es correcto haciendo un análisis similar al siguiente:

$$27\textcircled{0}8\textcircled{1}4\textcircled{2}7\textcircled{3} \text{ es } 27 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} \text{ igual a } 27 \frac{847}{1000}$$

$$37\textcircled{0}6\textcircled{1}7\textcircled{2}5\textcircled{3} \text{ es } 37 \frac{675}{1000}$$

$$875\textcircled{0}7\textcircled{1}8\textcircled{2}2\textcircled{3} \text{ es } 875 \frac{782}{1000}$$

$$\text{Sumando } 27 + \frac{847}{1000} + 37 \frac{675}{1000} + 875 \frac{782}{1000} = 941 \frac{304}{1000}$$

que puede escribirse: 941⁰3¹0²4³

Para las otras cuatro operaciones Stevin procede de manera semejante: siempre recurre a las operaciones con fracciones con denominadores potencias de diez para demostrar la validez del algoritmo propuesto.

II. Los problemas y el cálculo con los números decimales

Inicialmente, la propuesta de Stevin no tuvo gran aceptación, probablemente porque su representación para los decimales no era tan práctica como después lo llegó a ser, o simplemente porque la costumbre era realizar los cálculos con los quebrados.

Dos hechos ayudaron para que las operaciones con decimales se popularizaran: la notación con punto decimal usada en el siglo XVII por Napier y la creación, en el siglo XVIII, del Sistema Métrico Decimal.



Actividad 21

La siguiente ilustración es una multiplicación que aparece resuelta en *La Disme*:

$$\begin{array}{r} \textcircled{0} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ 3257 \\ \times 2605 \\ \hline 16285 \\ 19540 \\ 19540 \\ 65140 \\ \hline 8495685 \\ \textcircled{0} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \end{array}$$

Los números decimales se comportan de una manera diferente que los naturales, lo cual también tiene consecuencias al trabajar con problemas.

- ¿Cuáles números se están multiplicando?
- ¿Qué resultado se obtuvo?
- Demuestre, haciendo uso de fracciones con denominadores potencias de diez, que el resultado es correcto.

4. Sentido numérico y números decimales

La historia de las Matemáticas muestra el interés constante que la humanidad ha tenido por simplificar cada vez más los cálculos aritméticos: el uso de los dedos, los ábacos de las diferentes culturas, la creación de los logaritmos y la invención de diferentes máquinas mecánicas y electrónicas que ayudan a realizar los cálculos son una prueba de ello.



No cabe duda que saber resolver las cuatro operaciones básicas ha sido y sigue siendo una competencia necesaria y deseable en las personas, sin embargo, las herramientas con las que se cuenta en la actualidad distan mucho de ser las de hace apenas unas décadas, y esto debe repercutir en la manera en que se utiliza el tiempo dedicado al aprendizaje de los cálculos aritméticos en la escuela.

A partir de la década de los noventa surgió la expresión *sentido numérico*, que engloba una serie de habilidades relacionadas con los números y el cálculo aritmético:

El sentido numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad para usar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias numéricas.¹⁰

Obviamente, el desarrollo del sentido numérico se favorece (o no) desde los primeros contactos con los números, en este caso con los decimales; no se trata de esperar a trabajarlo cuando los estudiantes van avanzados en su escolaridad.

Al igual que ocurre con los otros números, las primeras experiencias con los decimales tienen una influencia determinante en el desarrollo del sentido numérico. No es posible desarrollar sentido numérico alguno si no se ha comprendido el concepto de decimal.

Tener un buen sentido numérico con números decimales implica, entre otros aspectos:

- *Entender el significado de los números.* En el caso de los decimales es importante que el alumno comprenda las reglas que rigen el sistema decimal de numeración, que cada lugar a la derecha implica un valor relativo diez veces menor, que los números escritos a la derecha del punto decimal son menores que uno, que todas las cifras conforman un solo número y que no se trata de dos números separados por un punto.

¹⁰ Bruno (2000).

II. Los problemas y el cálculo con los números decimales

Si se comprende el significado de los decimales no se tiene problema en aceptar que $4.2 = 4.20 = 4.200 = 4.2000 = \dots$

- *Comprender que hay distintas maneras de representar un mismo número.* Por ejemplo, entender que las siguientes notaciones corresponden todas al mismo número:

$$0.15 = 0.1 + 0.05 = \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = \frac{15}{100} = 15\%$$

- *Tener idea del tamaño de los números.* Por ejemplo, saber que 0.125 es menor que 0.2. También es importante desarrollar la habilidad para identificar un resultado cuya magnitud no corresponde a lo planteado, por ejemplo, 2.1×4.5 no puede ser 94.5 porque el 2.1 indica poco más de dos veces 4.5.
- *Conocer las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas.* Si los alumnos comprenden que $0.5 = \frac{1}{2}$ saben que para multiplicar por 0.5 basta con obtener, mediante cálculo mental, la mitad del número. Por ejemplo, 15×0.5 da como resultado la mitad de 15, es decir 7.5. Un alumno con buen sentido numérico resuelve esta operación sin recurrir al algoritmo convencional de la multiplicación.

Dos hechos ayudaron para que las operaciones con decimales se popularizaran: la notación con punto decimal usada en el siglo XVII por Napier y la creación, en el siglo XVIII, del Sistema Métrico Decimal.

Conviene aclarar que en el caso de las propiedades de las operaciones no es necesario que los alumnos sepan nombrarlas e identificarlas, lo que es importante es que las utilicen y que lo hagan adecuadamente. Por ejemplo, para obtener el resultado de 8×4.25 sin usar el algoritmo convencional pueden proceder de varias maneras:

$$8 \text{ veces } 4.25 \text{ son: } 4.25 + 4.25 = 8.5, 8.5 + 8.5 = 17, 17 + 17 = 34$$

O bien:

8 por 4.25 es igual a 4.25 veces 8

4 veces 8 es 32

0.25 es igual a un cuarto, un cuarto de 8 es 2

4.25 veces 8 es 32 más 2 igual a 34



Obsérvese que en el segundo razonamiento se utilizó la propiedad conmutativa (cambió el orden de los factores) y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma (como 4.25 equivale a 4 más .25, se multiplica primero 4 por 8 y luego 0.25 por 8). Sería deseable que al término de la Educación Básica los alumnos fueran capaces de realizar razonamientos como los anteriores.

La estimación y el cálculo mental juegan un papel muy importante en el desarrollo del sentido numérico, de ahí la conveniencia de realizar continuamente actividades en las que los alumnos pongan en práctica estas dos habilidades.

Al hacer una estimación, los alumnos no tienen que dar la respuesta exacta sino una aproximación; el margen de error aceptable lo determina la situación particular que se está resolviendo. La estimación del resultado de un problema exige comprender la relación entre los datos antes de hacer las operaciones que lo resuelven y, además, permite controlar si el resultado obtenido (una vez resuelto) es factible.

Con respecto al cálculo mental, conviene aclarar que si bien se trata de dar una respuesta exacta no debe entenderse que lo que se hace es resolver mentalmente la operación usando el algoritmo convencional. El cálculo mental implica hacer uso de otras estrategias diferentes a las convencionales, por lo que practicarlos desarrolla la comprensión de los números y de las operaciones.

En la enseñanza, tradicionalmente se ha puesto más énfasis en los algoritmos de las operaciones y el cálculo escrito, olvidando trabajar con los alumnos cuestiones como las mencionadas en los párrafos anteriores. Es muy conveniente que los alumnos desarrollen un buen sentido numérico, que sean más críticos y reflexivos ante los datos numéricos y que no resuelvan siempre de la misma manera las operaciones. Es importante que ante una operación o un problema decidan si basta con una estimación del resultado, si se resuelve rápidamente con cálculo mental, si es preferible el cálculo escrito (con un algoritmo convencional o no convencional) o si es mejor usar la calculadora.





Actividad 22

1. Calcule mentalmente las respuestas a los siguientes problemas.
 - a) ¿Cuál es el resultado de 30×3.5 ?, ¿y de $10 \div 0.25$?
 - b) Un auto va a una velocidad constante de 100 km/h, ¿qué distancia recorre en 2.25 horas?
 - c) La distancia entre las ciudades A y B en un mapa es de 40.5 cm, si la escala es 1:100 000, la distancia entre las ciudades ¿es mayor o menor a 400 km?
2. Para cada problema indique si usted puede encontrar el resultado con cálculo mental o requiere hacer el cálculo escrito. Después, resuélvalos.
 - a) Un terreno mide 32.75 m de largo por 18.50 m de ancho. Si el precio por metro cuadrado es de \$350, ¿cuál es el costo del terreno?
 - b) Si una pluma cuesta \$2.50, ¿cuánto cuestan 6 plumas?
 - c) Al dividir 675 entre 4, si el resultado se aproxima hasta décimos, ¿cuál es el residuo?
 - d) Quiero comprar una bolsa de \$170.00, unos zapatos de \$235.00 y traigo un billete de \$500, ¿me alcanza para comprar la bolsa y los zapatos?
3. Si resuelve la operación: $0.3 + 0.2$, obtiene 0.5. Encuentre los números que podrían ir en los espacios en blanco de tal manera que el resultado siempre sea 0.5 y compruebe con la calculadora. ¿Hay sólo una solución para cada caso?
_____ - _____ _____ X _____ _____ ÷ _____
4. Calcule mentalmente.
 - a) $2.75 + 1.5$
 - b) $0.5 - 0.25$
 - c) $4 \times (0.5) \times (2)$
 - d) $5 \times (4.5 + 2.5) \div 100$

Cuando haya terminado, compruebe con la calculadora.



5. Analice las actividades anteriores e indique el papel que en cada una desempeñan la estimación, el cálculo mental, el cálculo escrito y el uso de la calculadora. Seleccione dos de ellas y adáptelas para trabajar con alumnos de cuarto a sexto de primaria o con alumnos de secundaria.

5. Los algoritmos convencionales de las operaciones con decimales

Con respecto a los algoritmos convencionales de las operaciones básicas, conviene poner atención en varios aspectos; en primer lugar, el uso de la operación debe tener sentido. Es importante también que al trabajar un algoritmo el alumno lo comprenda, es decir, que sepa dar respuesta a preguntas como: ¿por qué al sumar y restar decimales se debe alinear el punto?, ¿por qué hay que *bajarlo*?, ¿por qué al multiplicar se cuentan los decimales en los factores y se suman para determinar cuántos decimales debe tener el resultado?, ¿por qué al dividir se *sube* el punto?, etcétera.

a) Adición y sustracción de números decimales

En los algoritmos de la adición y sustracción de números decimales está presente la idea de este tipo de números como una ampliación del sistema de numeración decimal, de ahí que la regla para realizar estas operaciones sea:

- Acomodar los números cuidando que el punto decimal quede alineado verticalmente.
- Resolver la operación como si fuesen números naturales.
- Poner en el resultado el punto debajo del punto de los números que se sumaron o restaron.

Es de suma importancia que los alumnos comprendan que la alineación del punto decimal obedece a una razón matemática: hay que sumar o restar décimos con décimos, centésimos con centésimos, milésimos con milésimos, etcétera, al igual que para sumar naturales se alinean decenas con decenas, centenas con centenas, etcétera.

Una mirada a la enseñanza

Los buenos vecinos

Lea el siguiente fragmento de clase y después conteste lo que se solicita.

El maestro, de quinto grado, ha dedicado ya varias sesiones a la suma y la resta de decimales en las que aparecen ceros. El caso que ha resultado más difícil a sus alumnos es el de la resta con ceros en el minuendo. El maestro, el día de hoy, reitera una estrategia que ya ha utilizado anteriormente, y que refiere a *los buenos vecinos*.

Maestro: (*Anota en el pizarrón.*) Juana trae \$330.05, si va a pagar \$120.10, ¿cuánto le va a quedar?

$$\begin{array}{r} 330.05 \\ - 120.10 \\ \hline \end{array}$$

Maestro: ¿Qué pasa aquí?

Niños: ¡Que no hay dinero para quitar el 10! (*Por la uniformidad del coro, parece que saben qué respuesta espera el profesor.*)

Maestro: No hay dinero, pero ¿qué podemos hacer?

Niños: ¡Pedirle al vecino!

Maestro: Pedirle al vecino, pero ¿este vecino de aquí junto (*señala el cero en los décimos*) tiene para prestar?

Niños: ¡No!

Maestro: ¿Y este otro? (*señala el cero en las unidades*).

Niños: ¡No!

Maestro: No, ¿verdad?, tenemos que pedirle al vecino de hasta acá (*señala el 3 de las decenas*); éste es un buen vecino, les va a prestar a todos éstos (*señala del cero a la derecha*)... Pasa Luis a hacer los préstamos...

II. Los problemas y el cálculo con los números decimales

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \times 4.56 \\ 2.3 \\ \hline 1368 \\ 912 \\ \hline 10.488 \end{array}$$

Los factores tienen dos y una cifra decimal: $2 + 1 = 3$. El producto debe tener tres cifras decimales.

En la adición y la sustracción es relativamente fácil entender que las décimas se suman (o restan) con décimas y que el resultado son décimas, lo mismo para las centésimas o milésimas. Pero en el caso de la multiplicación, para los alumnos es más difícil entender que décimas por décimas da centésimas o centésimas por décimas da milésimas (como en el ejemplo).

A la manera de Stevin, se puede comprobar por medio de la representación de los números decimales como fracciones decimales:

$$4.56 \times 2.3 = \frac{456}{100} \times \frac{23}{10} = \frac{10488}{1000} = 10.488$$

La interpretación del signo \times pasa, en algunos casos del veces al *de* como ocurre cuando se multiplican fracciones comunes, por ejemplo:

4×8.2 puede interpretarse como 4 veces 8.2.

4.5×8.2 puede interpretarse como 4 veces y media 8.2.

0.5×8.2 puede interpretarse como *media* vez 8.2 pero se entiende mejor como la mitad de 8.2.

0.1×8.2 es difícil que se entienda como *una décima* vez 8.2 pero sí puede leerse como un décimo de 8.2.

Si se entiende la multiplicación de decimales de esta última forma, entonces puede construirse la idea de que décimos por décimos da centésimos.

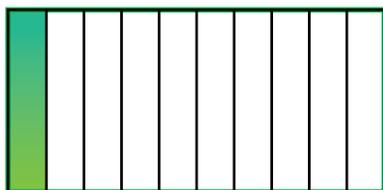
La estimación y el cálculo mental juegan un papel muy importante en el desarrollo del sentido numérico, de ahí la importancia de realizar continuamente actividades en las que los alumnos pongan en práctica estas dos habilidades.



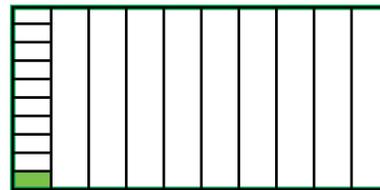
Los decimales: más que una escritura

0.1×0.1 es *un décimo de un décimo*, y esto equivale a *un centésimo*.

Gráficamente:



0.1
Un décimo



$0.1 \times 0.1 = 0.01$
un décimo de un décimo es un centésimo

Con la misma idea se llega a que un décimo de un centésimo es un milésimo, un centésimo de un centésimo es un diezmilésimo, etcétera.

c) División de números decimales

Al igual que con los números naturales, la división con los decimales es la que presenta mayores dificultades para los alumnos. Se puede considerar que para la división hay dos casos:

- Cuando el divisor es natural y el dividendo es decimal.
- Cuando el divisor es decimal y el dividendo puede o no ser decimal.

En ambos casos la división se resuelve como si fueran números naturales y lo que hace diferente uno del otro es el manejo del punto decimal. El primer caso es más sencillo porque, como se dice, *sólo hay que subir el punto*.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 1.6 \\ 4 \overline{)6.4} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

II. Los problemas y el cálculo con los números decimales

La justificación de *se sube el punto* es la siguiente:

- Al dividir 6 enteros entre 4 el resultado es 1 entero y sobran 2 enteros.
- La acción de *bajar el 4* corresponde a juntarlo con el 2 y formar el 24, que NO son enteros sino décimos: como 2 enteros ya no se pueden repartir entre 4 lo que se hace es cambiarlo por 20 décimos que junto con los 4 décimos que se tienen hacen un total de 24 décimos.
- Estos 24 décimos se dividen entre 4 y el resultado son 6 décimos, ya NO se están repartiendo enteros sino décimos que ocupan el primer lugar después del punto decimal, así que en el momento de bajar el primer decimal hay que colocar el punto en el cociente para indicar que empiezan a repartirse décimos.

En el caso de las propiedades de las operaciones no es necesario que los alumnos sepan nombrarlas e identificarlas, lo que es importante es que las utilicen y que lo hagan adecuadamente.

La comprensión del algoritmo del caso en el que el divisor es un decimal requiere que los alumnos:

- a) Hayan construido el significado de la fracción como cociente, que sepan que las fracciones pueden representarse como divisiones y las divisiones como fracciones.
- b) Hayan construido la idea de que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número se obtiene una fracción equivalente. Esta propiedad, aplicada a las divisiones, se enuncia de la siguiente manera: si se multiplica dividendo y divisor por un mismo número, el cociente no se altera.

Teniendo en mente estas dos ideas, cuando se tiene una *división* con divisor decimal se puede encontrar otra división equivalente que no tenga divisor decimal, esto se logra multiplicando dividendo y divisor por 10, 100, 1000, etcétera, según sea necesario para *eliminar* el punto del divisor, es decir, para que sea un número natural y se obtenga una división como las del caso anterior o en donde tanto dividendo como divisor sean naturales. Por ejemplo:

$$2.45 \overline{)6.312} \text{ multiplicando dividendo y divisor por cien se obtiene } 245 \overline{)631.2}$$



En la práctica suele decirse que *se recorre el punto a la derecha*, obsérvese que lo que realmente se hace es multiplicar por cien el *dividendo* y el *divisor*, lo que también justifica el hecho de que, si en el dividendo no alcanzan las cifras para recorrer el punto, se agregan ceros.

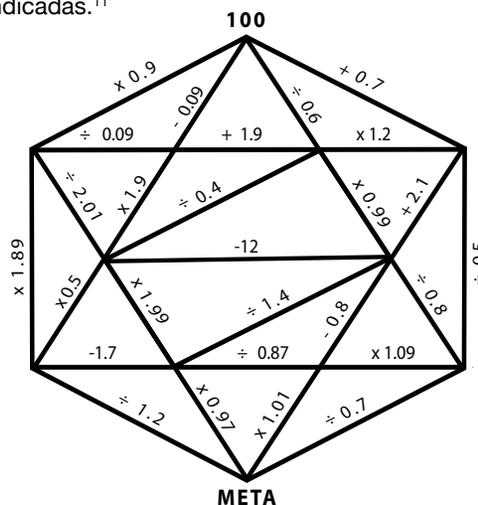


Actividad 24

Para la siguiente actividad necesita fotocopiar el diagrama de *El laberinto* del anexo de la página 107. Para que tenga más sentido le recomendamos lo siguiente: marque el camino completo que considere lleva al máximo puntaje SIN hacer las operaciones, sólo estimando o utilizando su intuición. Cuando haya marcado el camino, resuelva las operaciones con la calculadora y anote su puntaje.

El laberinto

Empieza el juego con 100 puntos. Se trata de que remarque aquel camino que considere lleva a la meta consiguiendo el mayor puntaje. Las condiciones son: no pasar dos veces por el mismo segmento ni por el mismo punto. Use calculadora para hacer las operaciones indicadas.¹¹



¹¹ E. Castro (2001).

II. Los problemas y el cálculo con los números decimales

- a) ¿Cuál fue el puntaje que obtuvo? (El máximo puntaje que se alcanza con las condiciones descritas es poco más de 54 000 puntos, si no los obtuvo pruebe otros caminos hasta tratar de conseguir ese total de puntos.)
- b) Analice la actividad anterior:
 - ¿Cuál considera que es el propósito de la misma?
 - ¿Qué contenidos matemáticos están en juego?
 - ¿Desarrolla el sentido numérico con los decimales? Argumente su respuesta.



Actividad 25

1. Revise algún libro de texto de Matemáticas de quinto o sexto grados de primaria o de primero de secundaria. Identifique las lecciones dedicadas a los algoritmos de los números decimales y analice:
 - a. ¿Parten de la resolución de problemas? Dé un ejemplo.
 - b. ¿Dan oportunidad a que los alumnos empleen procedimientos propios para resolver problemas que involucran el uso de números decimales? Dé un ejemplo.
 - c. ¿Promueven la estimación y el cálculo mental con números decimales? Dé un ejemplo.
 - d. ¿Hacen reflexionar al alumno acerca de lo que se hace al resolver operaciones usando los algoritmos convencionales? Dé un ejemplo.

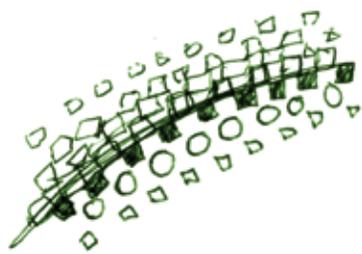


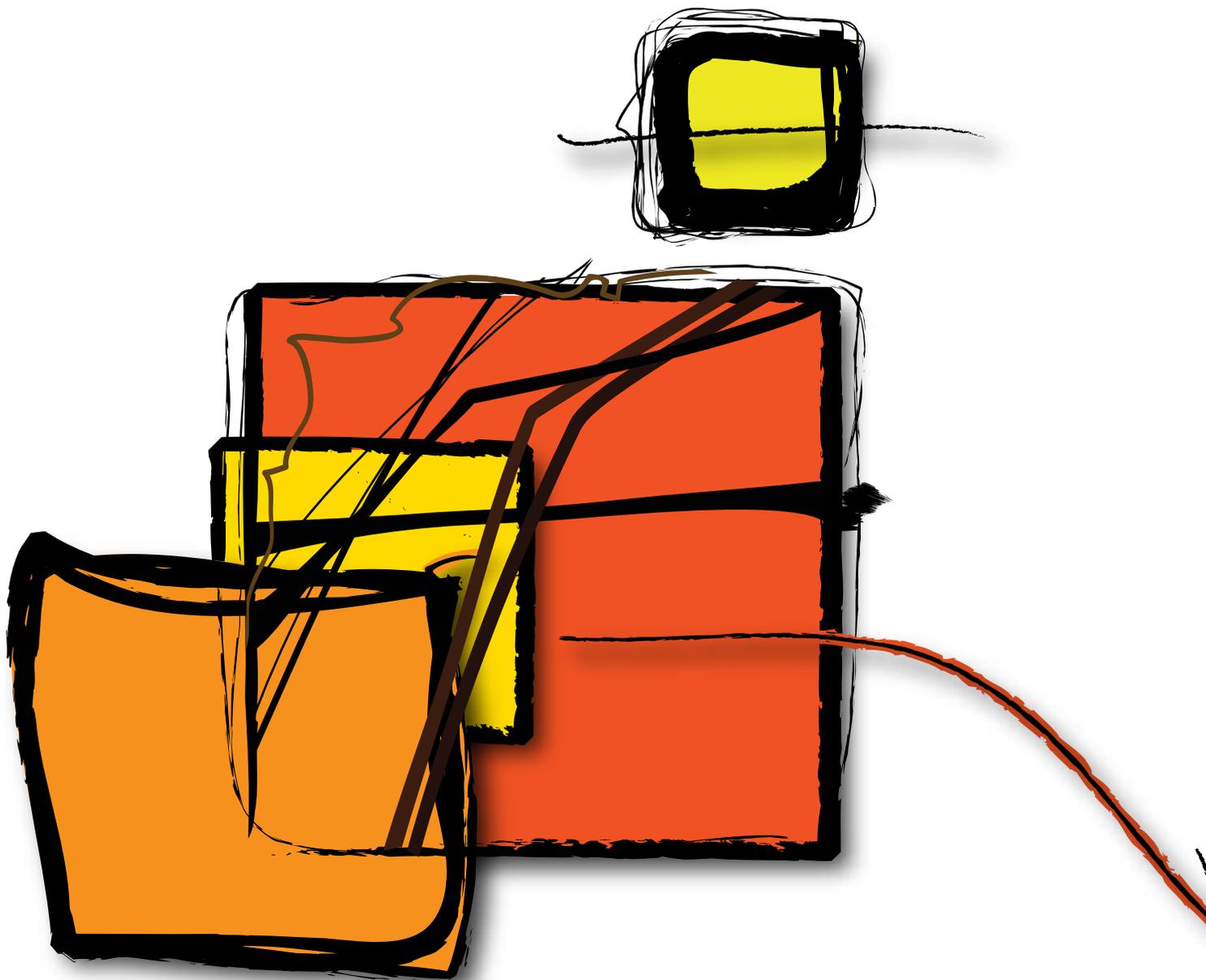


2. Reflexione:

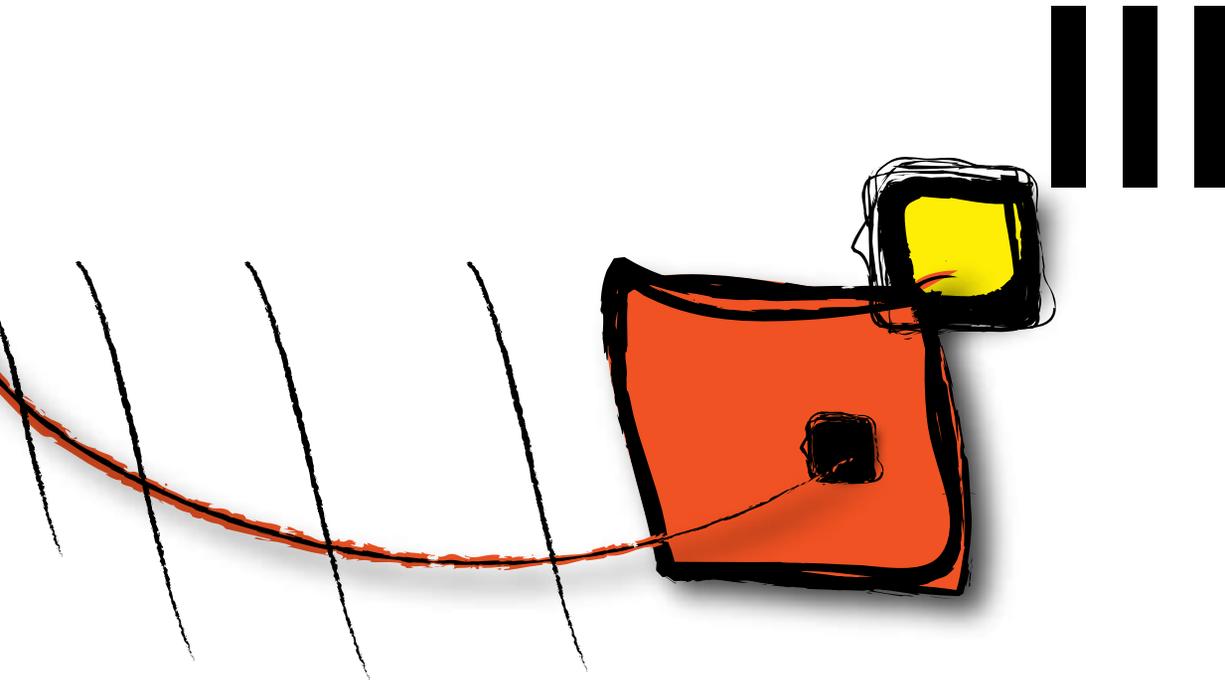
Si tuviera que elegir entre desarrollar el sentido numérico con los números decimales o estudiar los algoritmos de las operaciones básicas con los números decimales, ¿qué escogería? Argumente su elección.

3. Identifique y analice la secuencia didáctica propuesta para la enseñanza de los decimales en algún programa o libro de texto de su interés. Proponga los ajustes y las modificaciones que considere convenientes.
4. Consulte los programas de estudio que están en el *Anexo*, ¿cuáles de ellos corresponde a la época en que usted estudió la primaria y la secundaria? Si sus profesores hubieran seguido estos programas al pie de la letra, ¿cuál sería su formación respecto a los números decimales?





Los números decimales en los Excale



A finales del ciclo escolar 2004-2005 el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación aplicó por primera vez los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (Excale);¹² el Excale 06-Matemáticas y Excale 09-Matemáticas evaluaron competencias matemáticas de 47 858 alumnos de sexto grado de primaria y 52 251 de tercer grado de secundaria, respectivamente.¹³ Estos exámenes arrojaron resultados sobre el grado de apropiación que los alumnos que están terminando su Educación Primaria o Secundaria tienen acerca de los números decimales, y revelaron aspectos de este tipo de números que resultan muy complejos para los estudiantes.

1. Educación Primaria, sexto grado

Los siguientes datos muestran el desempeño de los estudiantes mexicanos de sexto grado de acuerdo con los resultados presentados por el INEE:¹⁴

Entre los conocimientos y las habilidades que fueron evaluados y que más de 50% de los estudiantes de sexto grado tiene probabilidades de resolver con éxito, no hay ninguno relacionado con el tema de números decimales.

Más de 20 pero menos de 50 por ciento de los alumnos tiene probabilidades de resolver exitosamente tareas como: sumar y restar números decimales; resolver problemas aditivos con dos o más operaciones que impliquen números naturales, fraccionarios y decimales; calcular multiplicaciones con

Entre los conocimientos y las habilidades que fueron evaluados y que más de 50% de los estudiantes de sexto grado tiene probabilidades de resolver con éxito, no hay ninguno relacionado con el tema de números decimales.

¹² En 2007 se aplicó una réplica del mismo examen de sexto a una muestra menor y en 2009 se aplicará un nuevo examen a ese mismo grado.

¹³ *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México*, p. 17.

¹⁴ *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México*, p. 63 y ss.



En general, los alumnos trabajan mejor la parte operatoria de los números decimales y tienen más problemas para comprender la parte conceptual.

números decimales, y resolver problemas que impliquen una multiplicación usando números naturales y decimales.

Las tareas como leer, escribir y comparar números decimales o calcular divisiones con naturales cuyo cociente es decimal, sólo fueron resueltas por más de 10 pero menos de 20 por ciento de los estudiantes; menos de 10% de los estudiantes tiene probabilidades de ordenar correctamente números decimales.

Estos datos señalan que:

- Más de la mitad de los alumnos terminan su Educación Primaria sin saber resolver situaciones que involucran números decimales.
- Las tareas *más sencillas* con estos números son las que se refieren a las operaciones de sumar, restar y multiplicar decimales.
- La operación más difícil para los alumnos es la división con naturales y cociente decimal.
- Las tareas más complejas son las que involucran un manejo adecuado del concepto de número decimal: comparar y ordenar decimales.

Lo anterior indica que los alumnos trabajan mejor la parte operatoria de este tipo de números y tienen más problemas para comprender la parte conceptual. Es probable que esto se deba a que resolver operaciones con decimales sigue reglas similares a las de los números naturales, mientras que la parte conceptual de estos números rompe con muchas de las ideas que los maestros y alumnos han construido sobre los números naturales. Estos resultados muy probablemente también reflejan el trabajo que se realiza en las clases de Matemáticas: el énfasis puesto en las operaciones (precedido de la lectura y escritura de números) y la desatención a la parte conceptual de los decimales.

Como ya señalamos, varias de las tareas relacionadas con números decimales resultaron ser muy complejas para los alumnos según los resultados de los Excale reportados en 2006. Por ejemplo, sólo 26% de los sustentantes resolvió correctamente reactivos similares a los siguientes:¹⁵

¹⁵ Explorador Excale: <http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraDificultad.php>

2. REACTIVO MUESTRA

En la siguiente tabla se muestra el peso de cinco pacientes de un doctor:

Nombre	Peso en kg
Isabel	48.30
Rosa	48.03
Claudia	48.3
Teresa	48.003
Yolanda	48.030

¿Quién pesa lo mismo que Isabel?

- A. Claudia.*
- B. Rosa.
- C. Teresa.
- D. Yolanda.

* Respuesta correcta

2. REACTIVO MUESTRA

Para hacer un experimento de química Rodrigo necesita 0.056 gramos de carbonato sódico. ¿Cuál de las siguientes fracciones expresa los gramos de carbonato que necesita Rodrigo?

- A. $\frac{56}{1000}$ *
- B. $\frac{56}{100}$
- C. $\frac{100}{56}$
- D. $\frac{1000}{56}$

* Respuesta correcta

En el primer reactivo se evalúa la comparación de números decimales hasta centésimos con cero entre el punto y la última cifra significativa y, en el segundo, la conversión de un número decimal a su equivalente fraccionario.

Ambos tipos de reactivo están dentro del grupo de los más difíciles del examen: casi las tres cuartas partes de los estudiantes que están por terminar el sexto grado no logran resolverlos correctamente.

Muchos maestros consideran que es sencillo aprender los números decimales porque la representación y el uso de la parte fraccionaria (después del punto) sigue la misma lógica que los números que están antes del punto (parte entera del número); no obstante, como vimos a lo largo de este libro, y como lo permiten ver los reactivos del Excale, tal idea no es tan válida. Esta concepción –compartida por muchos maestros– se centra más en la escritura que en el concepto de decimal y acarrea problemas para su aprendizaje: genera una perspectiva limitada de lo que son los números decimales y ha colaborado muy poco en la comprensión de los mismos.



Actividad 26

Para cada uno de los dos reactivos anotados antes:

- Analice el reactivo y haga una lista de los conocimientos que los alumnos deben tener para poder resolverlo correctamente.
- Plantee una situación problemática en la que se pongan en juego uno o más de los conocimientos que haya enlistado.

La lectura y escritura de los números decimales también representa un problema para los alumnos de sexto grado; sólo 37% de quienes presentaron el Excale leyó correctamente un número decimal y 47% pudo escribirlo. Los reactivos presentados fueron similares a los siguientes:

El ganador de la carrera recorrió los 400 metros en 52.41 segundos.
¿Cómo se lee el número subrayado?

- Cincuenta y dos segundos, cuarenta y un centésimas de segundo*
- Cincuenta y dos segundos, cuarenta y un décimas de segundo
- Cincuenta y dos segundos, cuarenta y un milésimas de segundo
- Cincuenta y dos segundos, cuarenta y un diezmilésimas de segundo

* Respuesta correcta

¿Cómo se escribe el número tres enteros veinticuatro milésimo?

- 3.024*
- 3.24
- 3.240
- 3.0024
- 3.241000

* Respuesta correcta



Actividad 27

- ¿Recuerda cómo le enseñaron a leer y escribir números decimales?
- Si usted los ha enseñado, ¿cómo acostumbra hacerlo?

III. Los números decimales en los Excale

- c) Investigue en algún libro de texto de su interés la manera en que se introduce la lectura y escritura de los números decimales. ¿Qué opina?, ¿considera una buena manera de enseñar este tema? Argumente su respuesta.

En las operaciones básicas con decimales, las dificultades de los niños también son evidentes: en todos los casos, menos de 60% de los alumnos pudieron enfrentar con éxito tareas que implican sumar, restar, multiplicar o dividir usando los números con punto decimal. A continuación se muestran algunos ejemplos de reactivos con su correspondiente porcentaje de respuesta correcta.

43%	<p>¿Cuál es el resultado de la operación $55.15 - 35.2$?</p> <p>A. 19.95* B. 20.13 C. 51.63 D. 20.15</p> <p>* Respuesta correcta</p>	45%	<p>Un cuadrado tiene un perímetro de 44.08 m, ¿cuánto mide cada lado?</p> <p>A. 11.02 m* B. 1102 m C. 11.2 m D. 176.32 m</p> <p>* Respuesta correcta</p>
54%	<p>¿Cuál es el resultado de multiplicar 4.8×2.4?</p> <p>A. 11.52* B. 8.32 C. 1.152 D. 1152</p> <p>* Respuesta correcta</p>	56%	<p>Dany tiene \$45.60, Carlos \$55 y Eric \$27.75, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?</p> <p>A. \$128.35* B. \$127.135 C. \$73.90 D. \$12 835</p> <p>* Respuesta correcta</p>
57%	<p>Luisa tiene \$21.50 y Fernando tiene 2.5 veces esa cantidad, ¿cuánto dinero tiene Fernando?</p> <p>A. \$53.75* B. \$42.250 C. \$537.50 D. \$5375</p> <p>* Respuesta correcta</p>		



El reactivo más difícil sobre operaciones con números decimales incluido en el Excale es uno en el que los estudiantes tenían que dividir; sólo 37% de los alumnos de sexto grado evaluados pudo resolver correctamente un problema similar al siguiente:

Un paquete de 100 hojas mide 8 mm, ¿cuál es el grosor de cada hoja?

- A. 0.08 mm*
- B. 12.5 mm
- C. 08 mm
- D. 800 mm

* Respuesta correcta



Actividad 28

Analice los reactivos y, con base en ello, conteste:

- a) ¿Por qué considera que el reactivo sobre resta fue más difícil que los de suma y multiplicación?
- b) ¿Por qué considera que el reactivo sobre suma fue el de porcentaje de respuesta correcta más alto?
- c) ¿Por qué considera que el reactivo de multiplicación sin contexto resultó más difícil que el problema de multiplicación?
- d) ¿Por qué considera que resultó difícil el reactivo que tuvo 37% de respuesta correcta?
- e) ¿Ha enseñado alguna vez las operaciones con números decimales? De ser así, ¿cómo acostumbra hacerlo?, ¿por qué lo hace así?

2. Educación Secundaria, tercer grado

En secundaria la situación es parecida a la de primaria. Los reactivos sobre decimales tienen un porcentaje de respuesta correcta que está entre 15 y 54 por ciento, es decir que casi la mitad de los alumnos que egresan de la Educación Secundaria tiene dificultades importantes con tareas que involucran diferentes aspectos de los números decimales.¹⁶

El reactivo que resultó más difícil del examen de tercero de secundaria corresponde a la resolución de un problema que implica identificar la raíz cuadrada de un número natural, sólo 12% de los alumnos lo contestó correctamente, y fue un problema similar al siguiente:

José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas.
Armado el rompecabezas también tenía forma de un cuadrado.
¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número de piezas que tiene un lado del rompecabezas que armó José?

- A) $\sqrt{400}$ *
- B) 400^2
- C) $\frac{400}{2}$
- D) 400×2

* Respuesta correcta

¹⁶ Explorador Excale: <http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraDificultad.php> (porcentaje de aciertos de reactivos de Aritmética).



Los dos reactivos que siguen en dificultad corresponden a tareas que involucran la interpretación de números decimales. En este caso, menos de la cuarta parte de los alumnos (21%) que están por terminar la secundaria leyó y representó correctamente números decimales mediante fracciones de denominador potencia de 10; sólo 15% de ellos resolvió correctamente problemas que involucran el uso de fracciones de hora expresadas con decimales. Los siguientes son los reactivos-muestra de este tipo de tareas.¹⁷

José representó el número 1.825 de la siguiente manera:

$$(1 \times 10^0) + (8 \times \frac{1}{10}) + (2 \times \frac{1}{100}) + (5 \times \frac{1}{10})$$

¿En cuál operación se equivocó José para que la representación del número 1.825 sea correcta?

- A. (1×10^0)
- B. $(8 \times \frac{1}{10})$
- C. $(2 \times \frac{1}{100})$
- D. $(5 \times \frac{1}{10})^*$

* Respuesta correcta

Arturo tardó 1.5 horas en hacer su tarea y Silvia tardó 1.2 horas.

¿Cuántos minutos más tardó Arturo que Silvia en terminar su tarea?

- A) 30.00 minutos
- B) 18.00 minutos*
- C) 0.30 minutos
- D) 0.18 minutos

* Respuesta correcta

¹⁷ Explorador Excale: <http://www.inee.edu.mx/explorador/muestraDificultad.php>



Actividad 29

Analice los reactivos:

- ¿Qué contenidos matemáticos están en juego en cada uno?
- ¿Por qué considera que resultaron difíciles a los alumnos?
- Con respecto al primer reactivo, ¿cuál es la expresión correcta que tenía que seleccionar José?
- Resuelva el segundo reactivo suponiendo que Silvia tardó 1.3 horas en hacer su tarea.

Los problemas que implican dos o más operaciones con números decimales pueden ser resueltos por pocos estudiantes al final de la Educación Básica (menos de la tercera parte de ellos). Ejemplos de este tipo de problemas son los siguientes:

28%

Doña Francisca vende empanadas.
En la preparación de cada empanada utiliza 0.075 kg de masa, ¿cuántas empanadas puede hacer como máximo si tiene cinco y media bolas de masa con un peso de 1.5 kg cada una?

- 93 empanadas
- 110 empanadas*
- 275 empanadas
- 825 empanadas

* Respuesta correcta

33%

Se mezclaron 25.5 litros de una sustancia con 5.25 litros de otra sustancia, y se les puso al fuego.
Al hervir la mezcla se evaporaron 0.25 litros, ¿cuántos litros de la mezcla quedó finalmente?

- 25.25 litros
- 30.5 litros*
- 30.75 litros
- 31.0 litros

* Respuesta correcta



Actividad 30

Analice los dos últimos reactivos.

- ¿Qué operaciones involucra cada uno?
- ¿Por qué considera que el primero resultó más difícil para los alumnos?
- ¿Por qué considera que ambos hayan resultado difíciles para los alumnos de tercer grado de secundaria?

La comparación de números decimales también resulta ser una tarea difícil para los alumnos de tercero de secundaria, prueba de ello es el siguiente reactivo, uno similar fue resuelto correctamente sólo por 34% de los alumnos.

En una competencia escolar, éstas fueron las mejores marcas en la prueba de salto de longitud:

 Manuel 2.05 m	 Luis 2.12 m
 José 2.055 m	 Pablo 2.090 m

¿Cuál de los alumnos obtuvo el primer lugar?

A) Manuel.
B) Luis.*
C) José.
D) Pablo.

* Respuesta correcta



Actividad 31

Localice en las páginas anteriores el ejemplo de reactivo sobre comparación de decimales que se aplicó a los alumnos de sexto de primaria, compare ese reactivo con el del salto de longitud.

- ¿En qué se parecen?
- ¿En qué son diferentes?
- Considere el porcentaje de respuesta de cada uno. ¿Qué opina?
- ¿Aprenden los alumnos a comparar decimales en la escuela secundaria? Argumente su respuesta.

Los ejercicios que involucraban conversiones y escritura de números decimales fueron resueltos satisfactoriamente sólo por 38% de los estudiantes; las tareas a las que se enfrentaron son similares a las del siguiente reactivo:

Un ciclista realizó el recorrido de una carrera en un tiempo de novecientos nueve centésimos de segundo ¿Cuál opción corresponde con el tiempo que registró el ciclista?

- 909.000 s
- 90.900 s
- 9.090 s*
- 0.909 s

* Respuesta correcta



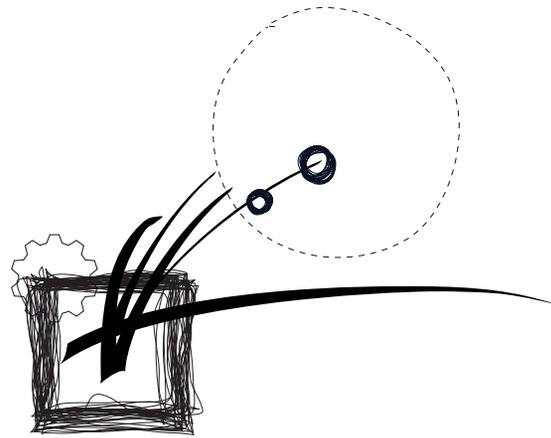
Actividad 32

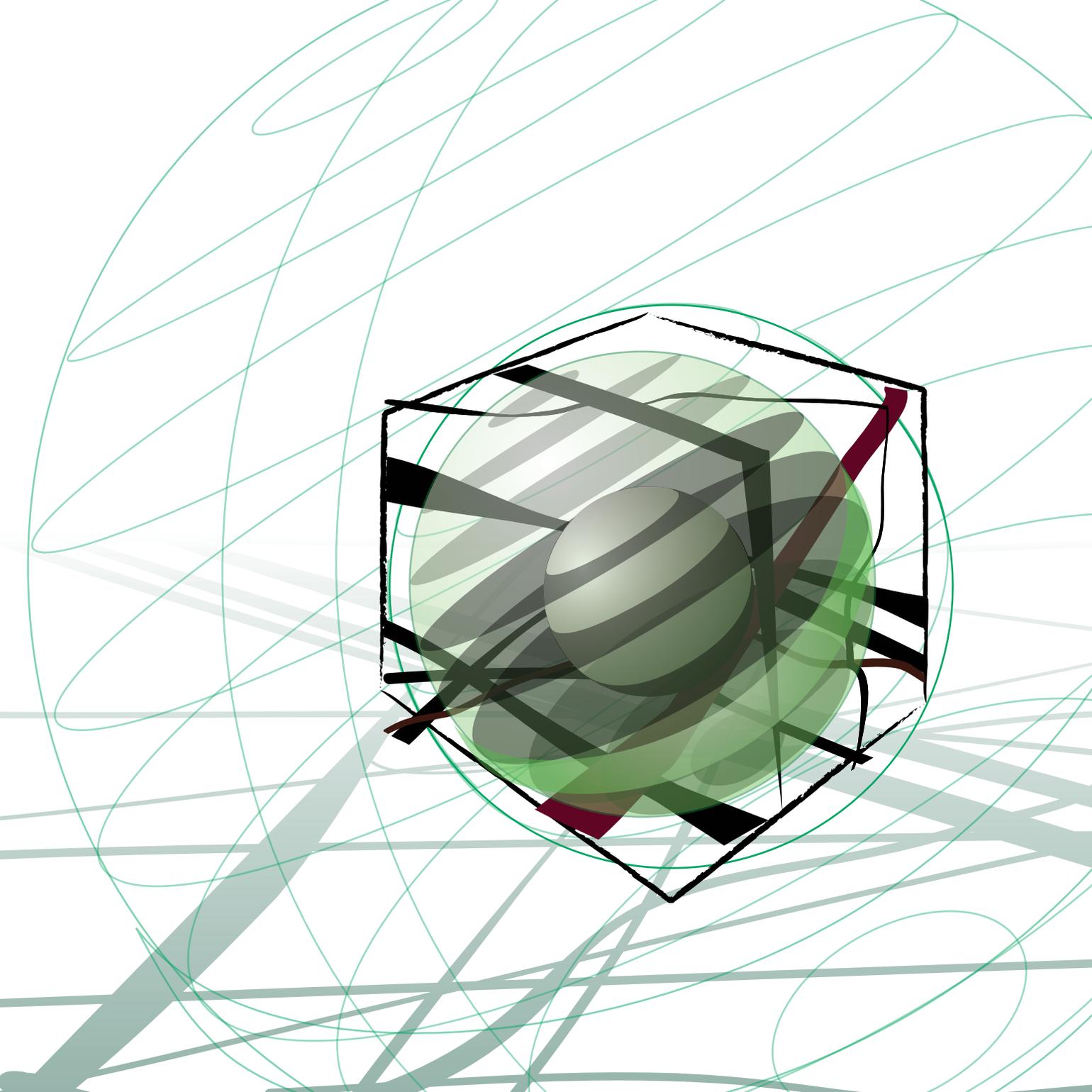
Identifique en las páginas anteriores el ejemplo de reactivo sobre escritura de decimales que se aplicó a los alumnos de sexto de primaria, compare ese reactivo con el del ciclista.

- a) ¿En qué se parecen?
- b) ¿En qué son diferentes?
- c) Compare el grado de dificultad, ¿qué opina?
- d) Considere el porcentaje de respuesta de cada uno. ¿Qué opina?
- e) ¿Aprenden los alumnos a escribir decimales en la escuela secundaria? Argumente su respuesta.

Lo expuesto a lo largo de este libro, aunado a otras investigaciones que dan cuenta de la dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de los números decimales, pone de manifiesto la necesidad de trabajar con detenimiento el tema de los números decimales, cuya problemática es bastante compleja.

El de los decimales es un tema al que se le ha prestado poca atención en la Educación Básica. Tanto en el currículo como en los materiales educativos y en la práctica de enseñanza, en general se les ha dedicado muy poco espacio, siendo las fracciones las preocupaciones centrales de profesores y planeadores, tema también complejo que merece dedicación de docentes y alumnos. Pero lo que hemos leído en este libro parece revelarnos la necesidad de poner tanta atención en los decimales como en aquellos números, pues *los decimales son más que una simple escritura y su comprensión no se logra con aprender los nombres de las columnas, escribir números al dictado y resolver operaciones mediante una extensión mecánica de la lógica con que trabajamos los números naturales.*





Anexo



LOS NÚMEROS DECIMALES EN LOS PROGRAMAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Grado	Programa de 1922	Programa de 1940	Programa de 1961	Programa de 1972	Programa de 1993
1°					
2°			Escritura y lectura de decimales hasta el centésimo, y aplicación de esta habilidad en centavos y centímetros. Escritura de medios, tercios, cuartos, quintos y décimos.		
3°	Introducción al estudio de las fracciones decimales.		Escritura y lectura de decimales hasta el milésimo. Prácticas de adición, sustracción y multiplicación de enteros cuyos resultados sólo comprendan hasta milésimos. Operaciones con metros y centímetros, pesos y centavos, para iniciarse en el uso del punto decimal.		
4°	Resolución mental y escrita de problemas prácticos, comprendiendo las cuatro operaciones con enteros, fracciones comunes y decimales.	Mecanización de las cuatro operaciones en fracciones comunes y decimales. Problemas escritos combinando las cuatro operaciones fundamentales, con enteros y decimales.	Escritura y lectura de números decimales hasta diezmilésimos. Multiplicación y división abreviada por 10, 100 y 1000, de enteros y decimales. Concepto claro de fracción decimal hasta diezmilésimos. Adición y sustracción de números decimales, cuya parte decimal sólo llegue a los milésimos. Multiplicación de números decimales, cuyo producto sea un número decimal que sólo llegue hasta los diezmilésimos. División de un número decimal entre un número entero. División de dos números decimales, empleando como dividendo y divisor números cuya parte decimal sólo llegue hasta los centésimos. Conversión de fracciones comunes usuales y sencillas en decimales y viceversa.	Establecerá relación de orden entre fracciones decimales. Efectuará adiciones y sustracciones con fracciones decimales. Resolverá problemas que impliquen el uso de fracciones decimales. Resolverá problemas que impliquen el uso de unidades de peso y volumen utilizando fracciones comunes y decimales.	Lectura y escritura de cantidades con punto decimal hasta centésimos asociados a contextos de dinero y medición. Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de números decimales asociados a problemas de dinero y medición.



Grado	Programa de 1922	Programa de 1940	Programa de 1961	Programa de 1972	Programa de 1993
5°		<p>Fracciones decimales, hasta milésimos.</p> <p>Operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números enteros, fracciones comunes y fracciones decimales.</p> <p>Reducción de fracciones comunes a decimales y viceversa.</p>	<p>Leer y escribir números decimales hasta cienmilésimos.</p> <p>Fracciones decimales. Concepto claro de fracción decimal que sólo llegue hasta los cienmilésimos.</p> <p>Adición, sustracción, multiplicación y división de números decimales, empleando números y cantidades tales que los resultados sólo lleguen hasta los cienmilésimos.</p>	<p>Sumará fracciones decimales hasta milésimos.</p>	<p>Lectura y escritura de números decimales asociados a diversos contextos.</p> <p>Comparación y orden en los números decimales.</p> <p>Equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas diversos de suma y resta de números decimales hasta milésimos.</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas de multiplicación de números decimales.</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas de división de números naturales con cociente hasta centésimos.</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas de división de números decimales entre números naturales.</p>
6°	<p>Cálculo mental y escrito por medio de problemas relativos a la vida común, por reducción a la unidad, partes alícuotas y proporcionales, con enteros y fracciones comunes y decimales, comprendiendo especialmente las operaciones de tanto por ciento, interés y descuento, comisión, cambios, impuestos y compañía.</p>	<p>Fracciones decimales hasta diezmilésimos.</p> <p>Cálculo con fracciones comunes y decimales hasta milésimos.</p> <p>Reducción de fracciones comunes a decimales y viceversa.</p>	<p>Fracción decimal: las cuatro operaciones y las operaciones abreviadas con decimales.</p> <p>Conversión de fracciones decimales en fracciones comunes y viceversa.</p>	<p>Comparará números racionales, mediante la observación de la recta numérica.</p> <p>Establecerá la equivalencia entre fracciones comunes y fracciones decimales.</p>	<p>Lectura y escritura de números decimales.</p> <p>Ubicación de números decimales en la recta numérica.</p> <p>Escritura en forma de fracción de números decimales; escritura decimal de algunas fracciones.</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta con números decimales hasta milésimos.</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas de multiplicación de números decimales hasta milésimos.</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas de división de números decimales entre números naturales.</p> <p>Expresión de porcentajes en números decimales.</p>

LOS NÚMEROS DECIMALES EN LOS PROGRAMAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

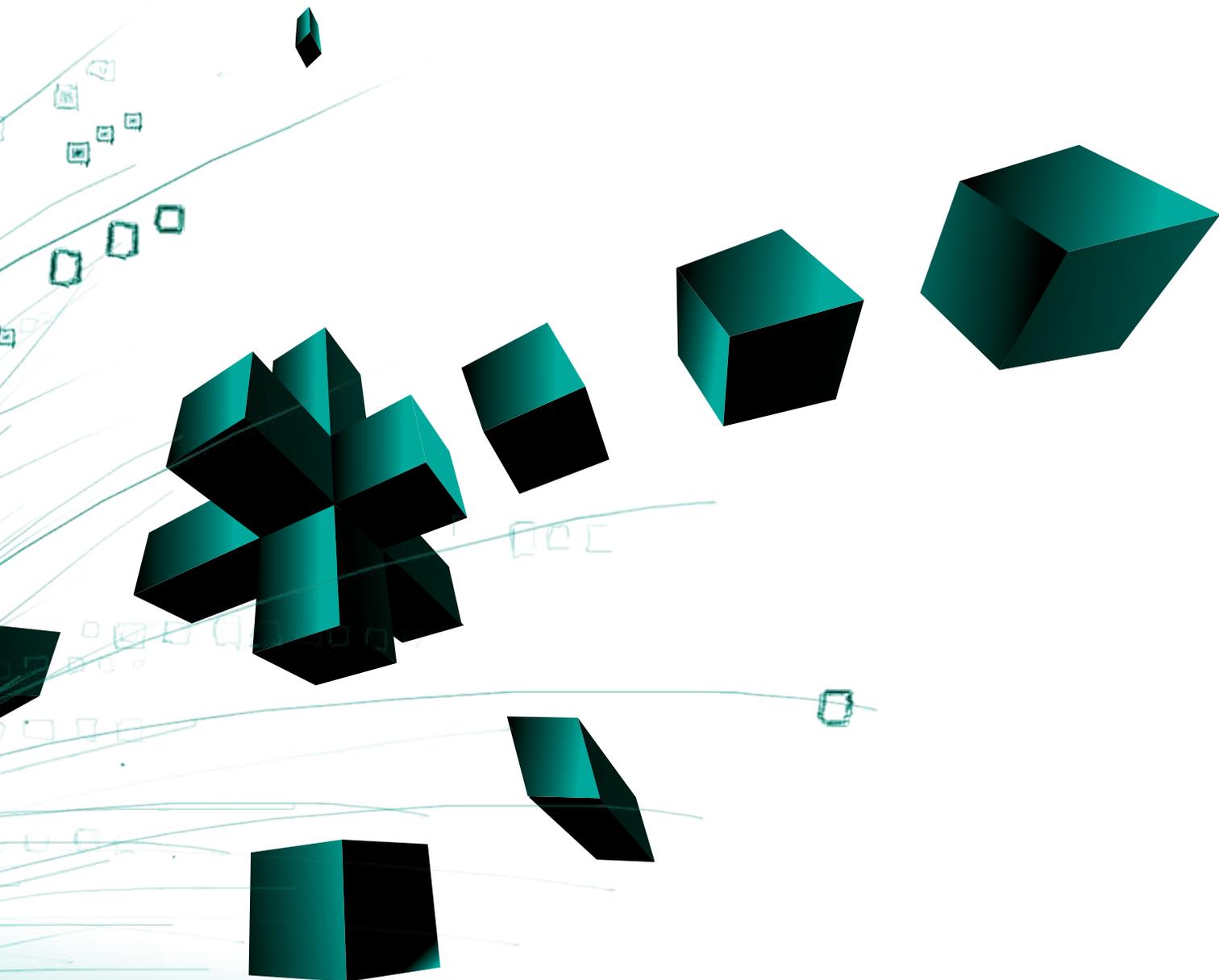
Grado	Programa de 1933	Programa de 1964	Programa de 1978
1°	<p>Unidad III. Fracciones comunes y decimales</p> <p>1. Definiciones y propiedades simples. Vocabulario: numerador y denominador; fracciones propias y fracciones impropias; fracción común y fracción decimal.</p> <p>2. Operaciones fundamentales. Revisión de la adición y sustracción con números enteros y quebrados, comunes y decimales. Multiplicación y división por .1, .01, .001. Multiplicación y división por un quebrado decimal. Transformación de una fracción decimal en quebrado común irreducible. Transformación de un quebrado común en decimal.</p> <p>- Revisión de las cuatro operaciones fundamentales con enteros y fracciones comunes y decimales, motivadas por problemas concretos.</p>	<p>Segunda unidad: Las operaciones fundamentales con enteros y fracciones decimales</p> <p>Objetivo general: uso correcto de las cuatro operaciones fundamentales con enteros y decimales, y aplicación adecuada a la resolución de problemas.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La adición con enteros y decimales. 2. La sustracción de números enteros y decimales. 3. La multiplicación de números enteros y decimales. 4. La división de números enteros y decimales. La división como operación inversa a la multiplicación. 	<p>Unidad 5: Números racionales no negativos y proporcionalidad</p> <p>Objetivos particulares: Manejará la expresión decimal de los números racionales al efectuar operaciones.</p> <p>Objetivos específicos: Representará números racionales de la forma m/n en su expresión decimal.</p> <p>Actividades: Observe que la expresión m/n representa $m:n$. Realice la división $m:n$ para encontrar la expresión decimal del número racional m/n. Observe que las expresiones decimales pueden ser finitas o periódicas. Represente la parte periódica de la expresión decimal con una barra superior, por ejemplo: $9.3737\dots = 9.\overline{37}$. Concluya que todo número racional tiene una expresión decimal periódica. Identifique los nombres de los términos de un numeral, como por ejemplo: $1.1234 = 1$ entero, 1 décimo, 2 centésimos, 3 milésimos, 4 diezmilésimos. Realice ejercicios de lectura y escritura de números decimales.</p>



Grado	Programa de 1993	Programa de 2006
1°	<p>Los números decimales y sus operaciones</p> <p>Revisión de la noción de número decimal</p> <ul style="list-style-type: none">- Uso en la medición y otros contextos familiares.- Lectura y escritura, orden y comparación.- Ubicación en la recta numérica. <p>Fracciones decimales: escritura en forma de fracción de un decimal y, recíprocamente, escritura decimal de fracciones decimales</p> <p>Operaciones con decimales</p> <ul style="list-style-type: none">- Problemas y aplicaciones diversas.- Práctica de cálculo mental y la estimación de resultados.- Revisión de los algoritmos y verificaciones. <p>Cálculo con números truncados y redondeados para aproximar o estimar un resultado o para controlar el resultado obtenido en la calculadora.</p>	<p>Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico Tema: Significado y uso de los números</p> <p>Bloque 1. Subtema: Significado y uso de los números</p> <p>Representar números fraccionarios y decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones, analizando las convenciones de esta representación.</p> <p>Bloque 2. Subtema: Problemas aditivos</p> <p>Resolver problemas aditivos con números fraccionarios y decimales en distintos contextos.</p> <p>Bloque 2. Subtema: Problemas multiplicativos</p> <p>Resolver problemas que impliquen la multiplicación de números decimales en distintos contextos.</p> <p>Bloque 3. Subtema: Problemas multiplicativos</p> <p>Resolver problemas que impliquen la división de números decimales en distintos contextos.</p>



Bibliografía



- Ávila, A. (2004), “Los decimales como objeto de aprendizaje y enseñanza”, México: UPN, documento no publicado.
- Ávila, A., H. Balbuena, I. Fuenlabrada, G. Waldegg (2000), *Matemáticas. Quinto grado*, México: SEP.
- Backhoff, E. et al. (2006), *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México: sexto de primaria y tercero de secundaria*, México: INEE.
- Brousseau, G. (1998), “Obstacles Épistémologiques, problèmes et ingenerie didactique”, en Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, pp. 165-197.
- _____ (1998), “Problemes de L’enseignement des decimaux”, en Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, pp. 115-163.
- Brown, M. (1987), “Place value and decimals”, en Ka. M. Hart (ed.), *Children understanding of Mathematics: 11-16*, Inglaterra: Anthony Rowe Publishing Services.
- Castro, E. (2001), “Números decimales”, en Enrique Castro (ed.), *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria*, Madrid: Síntesis.
- Centeno, J. (1997), *Números decimales ¿por qué?, ¿para qué?*, Madrid: Síntesis.
- Dávila, M., H. Balbuena, I. Pazos, Á. Olivera, S. García (2002), *Matemáticas. Quinto grado. Libro para el maestro*, México: SEP.
- Llinares, S. (2003), “Fracciones decimales y razón. Desde la relación parte todo al razonamiento proporcional”, en Carmen Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria*, Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Mendoza, J. (2007), *El aprendizaje de los decimales. Un estudio desde la noción de biografía didáctica*, documento no publicado.



- Nichols, E. y R.L. Swain (1975), *Matemáticas para el maestro de enseñanza elemental*, México: Editorial Continental.
- Perrin-Glorian, M.-J. (s/f), “Representation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du Collage”, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, núm. 24, París: IREM-Universidad de París VII.
- Peterson, J. y J. Hashisaki (1980), *Teoría de la Aritmética*, México: Limusa.
- Struik, D.J. (1987), *A Concise History of Mathematics*, 4a. ed. revisada, Nueva York: Dover Publications Inc.
- Waldegg, G. (1996), “Sobre el origen y significado de los números decimales”, *Básica. Revista de la escuela y del maestro*, núm. 11, México: Fundación SNTE, pp. 54-60.

Lecturas recomendadas sobre el tema

- Ávila, A. (2008), “Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi-invisible”, *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 2, México: Santillana (en prensa).
- Ávila, A., H. Balbuena, I. Fuenlabrada, G. Waldegg (2000), *Matemáticas. Quinto grado*, México: SEP.
- Centeno, J. (1997), *Números decimales ¿por qué?, ¿para qué?*, Madrid: Síntesis.
- Dávila, M., H. Balbuena, I. Pazos, Á. Olivera, S. García (2001), *Matemáticas. Quinto grado. Libro para el maestro*, México: SEP.
- Llinares, S. (2003), “Fracciones decimales y razón. Desde la relación parte todo al razonamiento proporcional”, en Carmen Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria*, Madrid: Pearson Prentice Hall.
- Waldegg, G. (1996), “Sobre el origen y significado de los números decimales”, *Básica. Revista de la escuela y del maestro*, núm. 11, México: Fundación SNTE, pp. 54-60.

Colaboradores

El siguiente listado incluye académicos del INEE, asesores, miembros de comités, expertos y docentes que contribuyeron en la elaboración de este material. Nuestro reconocimiento a todos ellos:

Generación 2006 - 2008 de la maestría en Desarrollo Educativo, línea Educación Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional, por la lectura cuidadosa y crítica del texto.

A los profesores Jorge Mena, Araceli Ávila, Laura Ofelia Roque, Alejandra Delgado y Salvador Salgado, que desde Guerrero trabajaron con este libro y nos hicieron saber de sus experiencias.

Al maestro Jesús Mendoza, que generosamente nos permitió utilizar materiales de su investigación en proceso.

A la maestra María Morales Ramírez que, sin saberlo, ayudó a escribir este libro.

Al matemático Pedro Cruz, por resolver muchas de nuestras dudas sobre los números reales.

A Juan Cristóbal Ramírez Peraza y a las autoras por ceder-nos las fotografías que ilustran esta colección.

Especialistas

Irma Fuenlabrada Velásquez

Juan Carlos Xique Anaya

Comité Didáctico de docentes

Angélica Munguía Moreno, Estado de México

Irineo Trujillo Albarrán, Guanajuato

Laura Elizarrarás Martínez, Guanajuato
María Guadalupe Juárez Reyes, Estado de México
Mercedes Hernández Cruz, Querétaro
Miguel Lona Gámez, Guanajuato
Nereyda Alegría Corrales, Guanajuato
Olivia González Segovia, Aguascalientes
Pablo Ramírez Martínez, Estado de México
Rosa Isela González Mejía, Querétaro

Coordinación INEE

Annette Santos del Real
Alejandra Delgado Santoveña
Hidalía Sánchez Pérez
María Minerva Nava Amaya
Rosa Mónica García Orozco

