

# Cajas para entender máximo y mínimo

Ana Laura Alvarez Méndez



**Prácticas Innovadoras**  
en educación básica y media superior

2017



**INEE**  
Instituto Nacional para la  
Evaluación de la Educación  
México

Prácticas Innovadoras  
**Cajas para entender máximo y mínimo**

Primera edición 2017

**Coordinación**

Martha Chicharro Gutiérrez  
Amós García Montaña (DINEE Querétaro)

**Autora**

Ana Laura Álvarez Méndez

**Curaduría**

Martha Chicharro Gutiérrez

**Coordinación editorial**

Blanca Estela Gayosso Sánchez

**Corrección de estilo**

Amós García Montaña

**Diseño**

Martha Alfaro Aguilar

D.R. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación  
Barranca del Muerto 341, Col. San José Insurgentes,  
Del. Benito Juárez, C.P. 03900, Ciudad de México.

La coordinación de esta publicación estuvo a cargo de la Dirección General de Investigación e Innovación. El contenido, la presentación, así como la disposición en conjunto y de cada página de esta obra son propiedad del INEE. Se autoriza su reproducción por cualquier sistema mecánico o electrónico para fines no comerciales.

Cítese de la siguiente manera:

Álvarez, A. (2017). *Cajas para entender máximo y mínimo*. Serie: Prácticas Innovadoras. México: INEE.

Consulte el Catálogo de publicaciones en línea: [inee.edu.mx](http://inee.edu.mx)





## Presentación

La Dirección General de Investigación e Innovación (DGII) del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), a través de la Dirección de Innovación y Proyectos Especiales (DIPE), creó en 2016 el proyecto “*Documentación de buenas prácticas en innovación y evaluación educativa*”, con la finalidad de que docentes, directivos, supervisores, asesores técnico pedagógicos y jefes de enseñanza de la educación obligatoria, cuenten con un espacio para compartir la experiencia de su quehacer educativo.

Una Práctica Innovadora (PI), se entiende como el conjunto de acciones que se realizan con un propósito claro, que busca mejorar una situación específica o solucionar un problema identificado en el aprendizaje de los estudiantes, en la convivencia, o en la gestión escolar; a través de la incorporación de elementos o procesos que no se hayan utilizado con anterioridad en el contexto específico en que se planearon y llevaron a cabo.

La innovación está presente, a través del uso de materiales o espacios de una herramienta tecnológica, de la incorporación de una técnica didáctica, o de la puesta en práctica de un proceso novedoso que utilicen en el desarrollo de su práctica, por ello es necesario que se haga explícito y se refiera al contexto en el que se utiliza.

### Procedimiento

El proceso de documentación de la Práctica que se comparte en esta serie, además del componente innovador, incluye un proceso de evaluación que da cuenta del logro o de los avances que se tuvieron en su puesta en marcha.

La narración es amplia y detallada, de tal forma que actores educativos del mismo nivel y tipo educativo, la puedan ejecutar, con las adecuaciones que consideren necesarias para su medio.

Las prácticas innovadoras compartidas mediante este proyecto, son publicadas en el micrositio del INEE [http://www.inee.edu.mx/index.php/index.php?option=com\\_content&view=article&layout=edit&id=2497](http://www.inee.edu.mx/index.php/index.php?option=com_content&view=article&layout=edit&id=2497)

Ciudad de México, junio 2017



## Datos generales

**Autor(es)**

□ Ana Laura Álvarez Méndez

**Localidad**

□ Santiago de Querétaro, Querétaro

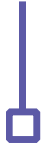
**Nivel y tipo educativo**

□ Bachillerato General

**Ámbito de intervención**  
(docencia, dirección, supervisión,  
coordinación, ATP)

□ Docencia





# 1

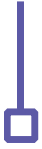
## Situación a mejorar

Desempeños a que contribuye la práctica:

- Reconoce el patrón de comportamiento gráfico de las funciones polinomiales de grados tres.
- Describe las propiedades geométricas de las funciones polinomiales de grados tres.
- Utiliza transformaciones algebraicas y propiedades geométricas para obtener la solución de ecuaciones factorizables.
- Representa gráficamente las funciones polinomiales de grados tres en la resolución de problemas.

Competencias a las que contribuye:

- Aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos mediante el lenguaje verbal.
- Interpreta tablas y gráficas símbolos matemáticos

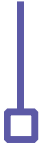


Existe una desvinculación intradisciplinaria que permita a los estudiantes relacionar conocimientos previos que le permitan anclar el nuevo conocimiento así como comprender algunos temas de cálculo diferencial que es posterior, la estrategia que se presenta permite introducir una aplicación con elaboración de modelos físicos, logrando un nexo entre los contenidos académicos y reales, vincular con cálculo diferencial la temática de la obtención de puntos críticos a partir de la aplicación de la primera derivada. Esto les facilita elementos previos que permitan la comprensión cabal de la interpretación geométrica y física de la derivada. El estudiante aprende haciendo y se atiende al estilo kinestésico que requiere ejemplos de la vida real, tareas prácticas o clases fuera del aula (Lozano, 2000).

Durante la aplicación de la estrategia se hace énfasis en las preguntas guía, lo cual permite al estudiante reflexivo reunir suficiente información para comprender la situación didáctica, ya que requieren de estrategias para observar, tener tiempo para reflexionar, escuchar a los demás, revisar lo aprendido y reunir suficiente información antes de opinar o dar una respuesta.

Es una intervención docente que atiende en forma multimodal pues en todo momento existe la expresión oral con explicaciones, visual con la gráfica, para lo prácticos está la construcción, los teóricos a través de los cálculos matemáticos y sus expresiones en los tres lenguajes, por tanto, incrementan habilidades para resolver problemas desde diversas perspectivas.





# 2

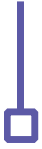
## Diagnóstico

Se aplicó el test VARK sobre percepción de la información obteniendo como estilo dominante un 48% kinestésicos, 27% auditivos, 14% lecto-escritores y 11% visuales. Como promedio grupal se obtuvo 3.6 para visual, 5.4 para auditivo, 4.3 para lecto-escritor y 6.1 para kinestésico, lo cual me indica la percepción del grupo que es en su mayoría kinestésico y posteriormente auditivo (Lozano, 2001).

Instrumento para la evaluación diagnóstica: <http://vark-learn.com/el-cuestionario-vark/>

Se aplicó test CHAEA para procesamiento de información obteniendo como estilo dominante reflexivo 37.3%, pragmático 21.5%, activo 21.5% y teórico 19.7%. Como promedio grupal se obtuvo 13.5 reflexivo, 13.3 pragmático, 12.2 activo y 13.1 teórico que más bien indica multimodalidad (Alonso, Gallego y Honey, 1994).

Se aplicó un examen diagnóstico con preguntas relativas a conversión entre lenguajes (cotidiano y matemático), fórmulas para cálculo de volumen, y la relación que existía entre las asignaturas que ya habían cursado y la actual (autoevaluación por lista de cotejo). El resultado fue que la mayoría olvida la relación entre las asignaturas, pero no las fórmulas, lo cual es memorístico y tampoco encuentran relación con la asignatura actual.



Reactivos:

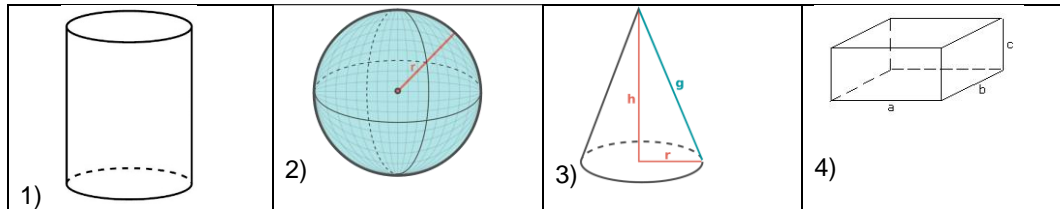
Escribe tres objetos que se compren basados en:

1) una dimensión física	2) dos dimensiones físicas	3) tres dimensiones físicas
-------------------------	----------------------------	-----------------------------

Convierte las siguientes situaciones a lenguaje algebraico (emplea las fórmulas adecuadas a cada caso).

4) La cuarta parte del área de un cuadrado.	5) El doble del área de un trapecio.	6) Tres cuartas partes del área de un triángulo.
---------------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------------------

La fórmula para calcular el volumen de cada cuerpo es:



Las funciones polinomiales pueden estimarse gráficamente, numéricamente y analíticamente.

- 1) ¿Qué parte de matemáticas I será necesaria para concluir este bloque sobre funciones?
- 2) ¿Qué parte de matemáticas III se liga a estas funciones?
- 3) ¿De geometría analítica piensas que emplearás alguna parte? ¿Cuál?
- 4) ¿Qué asignaturas se vinculan a estos temas? ¿De qué manera?





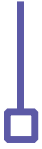
# 3

## Contexto

El Colegio de Bachilleres de Querétaro plantel 1 Satélite ofrece bachillerato general, escolarizado y presencial a aproximadamente 2100 estudiantes, lo cual implica que debe presentarse físicamente a clases en un horario determinado. El plantel cuenta con aulas y bancas suficientes, espacios deportivos, biblioteca, audiovisual, cafetería y áreas abiertas donde pueden desarrollarse actividades didácticas cambiando el ambiente de aprendizaje. Dispone de servicios básicos, pero internet es limitado y no se tiene en aulas. Ubicado en la Delegación Félix Osores Sotomayor cuenta con asentamientos irregulares y colonias de interés social, entorno socioeconómico de medio a bajo, situado al lado de la zona industrial Benito Juárez. El 50% tiene computadora con internet, por lo cual debo dar mayor tiempo para actividades que requieren Internet pues la escuela no cuenta con ese servicio. Es poco común que asistan a eventos culturales-académicos como teatro, música clásica, muestras de cine, conferencias, congresos...excepto a las solicitadas en la escuela.

La plantilla de profesores con base, en su mayoría cuenta con estudios de especialidad, maestría o doctorado, la capacitación docente se promueve cada año, sin embargo, es muy bajo el nivel de trabajo interdisciplinario pues se ha tomado como un requisito, no ha existido la capacitación adecuada que permita la real implicación en proyectos contextuales que permitan vincular conocimientos de varias áreas.

Otro problema es que en la etapa de planeación no se encuentra un gran porcentaje de docentes porque son eventuales y existe mucha rotación en el personal. A pesar de ello, cada uno de los docentes realiza esfuerzos de vincular los temas de su área con las demás, por ejemplo, en esta estrategia que trata de máximos y mínimos aproximados, también tratamos lo relativo a mercadotecnia donde lo más importante es vender sin importar el desperdicio de materiales.



# 4

## Descripción de las actividades

**Previo a la sesión:** Se solicita un cuadrado de cartulina o cartón de caja de cereal con medidas de 20 cm de lado por estudiante, tijeras, escuadra graduada, cinta adhesiva, lápiz, goma y calculadora.

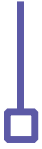
El docente deberá tener elaborada una tabla de medidas que indique el lado del cuadrado a recortar por cada estudiante. Se da a conocer la rúbrica para evaluación.

**Apertura.** (5 minutos)

Se plantea la siguiente situación: Una empresa manufactura cajas sin tapa para embalaje, en esta ocasión ha recibido placas cuadradas de cartón delgado con lado de 20 cm, su cliente solicita que le armen **cajas con el máximo volumen**, la condición es que la base y las paredes no sean recortadas por separado, sino que partan de la misma placa, les presentan el siguiente modelo, el cual se representa en el pizarrón por el docente. (imagen 1).

**Desarrollo:**

**Parte A** (55 minutos)



Se hacen preguntas al grupo para orientar hacia la solución a partir de los temas vistos previamente y del cuadrado de  $20 \times 20 \text{ cm}^2$  que emplearán

- 1) ¿Cuántas dimensiones tiene la superficie del cuadrado?
- 2) ¿Cuántas dimensiones tiene el cuerpo geométrico a elaborar?
- 3) ¿Cuáles son estas dimensiones?
- 4) ¿Cómo se calcula el volumen de este cuerpo geométrico?
- 5) Si representamos como  $x$  el lado del cuadrado a recortar en cada esquina del cuadrado ¿Cómo quedaría el modelo del volumen de la caja sin tapa?
- 6) ¿De cuántas medidas diferentes puedo recortar dicho cuadrado?
- 7) Si  $x=0$  ¿Qué sucede?
- 8) ¿Cuál es la medida más grande para  $x$ ?
- 9) ¿Cuál piensas que es la medida a recortar para obtener el máximo volumen?
- 10) Y si intento recortar una  $x$  mayor ¿Qué sucede?

Se indica a cada estudiante que se le proporcionará una medida del lado del cuadrado a recortar, armarán su caja y calcularán su volumen, mismo que anotarán en una tabla numérica que el maestro construirá en el pizarrón mientras cada estudiante construye su caja.

#### Ejemplo

Valor de $x$	frente	fondo	altura	volumen
0.5 cm				
1 cm...				

- A) Se da la medida del lado del cuadrado a recortar a cada estudiante, enseguida proceden a elaborar su caja, calcular el volumen y anotar en el renglón correspondiente en el pizarrón. Rotularán cada con nombre del estudiante, medida de  $x$ , medida de cada dimensión y volumen obtenido.
- B) Cada alumno debe ir completando su propia tabla numérica a partir de los datos que los compañeros van anotando en el pizarrón

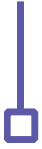
- C. Se acomodan en el piso todas las cajas en orden de lista y se pide a los estudiantes que elijan por observación, la caja que consideren tiene el máximo volumen, que indiquen en su tabla circulando el valor de  $x$  y el volumen de dicha caja.
- D. Se les solicita que con marcatextos indiquen en la tabla numérica, el volumen mayor obtenido y comparen con lo seleccionado visualmente. Se discute acerca de la percepción visual y su relación con la mercadotecnia comercial.
- E. Se entregan las cajas por orden de lista, de tal forma que cada caja debe caber perfectamente dentro de la anterior (Imagen 2).
- F. Se construye la gráfica con los datos de la tabla:  $X$  (lado del cuadrado recortado) y  $Y$  (volumen).

### Parte B (1 hora)

- A) Con su gráfica previamente elaborada se trabaja con preguntas (Imagen 3).

### Preguntas intercaladas durante toda la clase.

- 1) ¿Qué coincidencias encuentran entre la tabla numérica y la gráfica?
- 2) ¿Qué valor de  $x$  da como resultado el volumen mayor?
- 3) ¿Cómo se le llama a ese punto en específico?
- 4) ¿Qué nos indica?
- 5) ¿Qué sucede con el volumen antes de ese valor de  $x$ ?
- 6) ¿Qué sucede con el volumen después de ese valor de  $x$ ?
- 7) ¿Cuál es el dominio de la función que nos representa un volumen real?
- 8) ¿Qué sucede físicamente si tomamos  $x=10$  cm? ¿Qué representa en la gráfica? ¿Cuánto sería el total del volumen?
- 9) ¿Cuál es la imagen matemática de esta situación?
- 10) ¿En qué intervalo es creciente la gráfica?
- 11) ¿En qué intervalo es decreciente la gráfica?
- 12) Tenemos simbólicamente que  $V=x(20-2x)^2$  ¿Cómo se relacionan los ceros de la función con la gráfica?
- 13) ¿Existe alguna raíz de multiplicidad dos? Si la respuesta es afirmativa ¿En qué valor de  $x$ ? (Realizar la operación algebraica)
- 14) ¿Por qué sucede esto en la situación resuelta?
- 15) ¿En qué casos no habría raíz de multiplicidad dos?
- 16) ¿Puede darse el caso de una multiplicidad tres? ¿Cuál? ¿Habría también máximo y mínimo? (Explicitar la situación y argumentar)

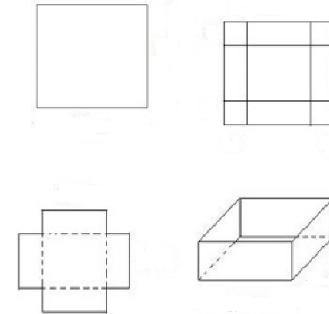


## Cierre

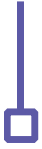
Se forman equipos de máximo cinco integrantes y se les asignan las dimensiones de un rectángulo, deben construir una caja sin tapa, la condición es que solo deben armar aquella con el máximo volumen. También se publica en el grupo cerrado en Facebook.



Proyecto por equipos de máximo 5 personas: Construir una caja con el máximo volumen a partir de un rectángulo de cartón de una caja de cereal o galletas. Condiciones: a) El rectángulo debe medir  $f$  cm de frente y  $w$  cm de fondo. b) Se cortarán cuadrados iguales en las cuatro esquinas del rectángulo. c) Entregarán una caja de máximo volumen. d) En un costado de la caja deberán escribir la función del volumen. e) En el fondo de la caja deberá encontrarse la gráfica de dicha función, indicando las coordenadas del punto máximo. f) En otro costado de la caja deberá estar la tabla numérica correspondiente a la gráfica. g) En otro costado de la caja deberán estar escritos de manera legible los nombres completos de los integrantes del equipo.



- H. Se comienza la resolución en el aula y se completa fuera de clase, la consigna es entregar en la siguiente sesión para revisión.
- I. Se entrega y se evalúa con rúbrica de la siguiente manera:
  - 1) por coevaluación, 2) autoevaluación y 5) Heteroevaluación



# 5

## Componente innovador

La estrategia permite introducir una aplicación con elaboración de modelos físicos, logrando un nexo entre los contenidos académicos y reales, vincular con cálculo diferencial la temática de la obtención de puntos críticos a partir de la aplicación de la primera derivada.

Es así que los elementos innovadores son: presentación de una situación didáctica, construcción de cajas físicamente en diferentes dimensiones, comparación entre la percepción visual y los cálculos matemáticos, vinculación de la aritmética (cálculos de volúmenes), álgebra (construcción de la función volumen de un cuerpo geométricos), geometría (dimensiones, construcción de cuerpo geométrico), geometría analítica (uso del plano cartesiano, elaboración de tabla numérica) con funciones polinomiales, correspondencia entre el lenguaje cotidiano y las diferentes representaciones del lenguaje matemático (numérico, simbólico y gráfico) así como la situación didáctica donde el estudiante aprende haciendo.

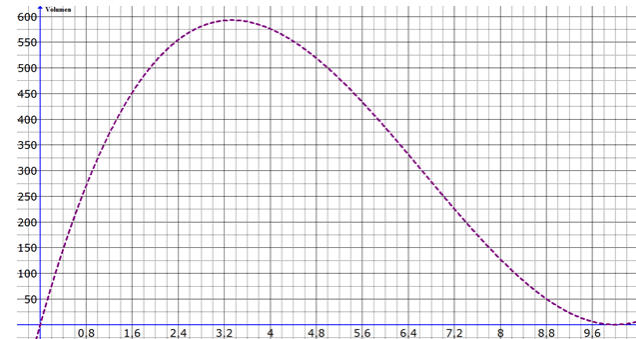
# 6

## Resultados

### Resultados cualitativos:

- Dos estudiantes no armaron correctamente la caja inicial por cuestiones de medida, solicitaron prórroga para la siguiente clase, una estudiante nuevamente la armó mal. Todos los estudiantes calcularon acertadamente el volumen de su caja, elaboraron su tabla numérica y su gráfica. Hubo gran sorpresa por la diversidad de cajas diferentes obtenidas a partir de la misma figura geométrica.
- Aproximadamente un 64% lograron ubicar visualmente la caja de mayor volumen.
- Todos los estudiantes participaron activamente durante las actividades, hubo polémica durante el tema relacionado con la mercadotecnia comercial y se sorprendieron de lo engañoso de los recipientes donde se nos venden productos.
- Todos los equipos obtuvieron correctamente lo solicitado para la segunda caja, un equipo no respetó elaborar la caja con material de reúso.
- Apreciaron la importancia de saber vincular el lenguaje común a las diversas representaciones del lenguaje matemático.

Lo más importante fue que al explicar el tema de máximos y mínimos (el siguiente semestre), lograron comprenderlo rápidamente debido a que se vinculó a la actividad realizada, el proceso con el método de la primera derivada no fue solo un algoritmo, sino que sabían la razón de cada paso a realizar.



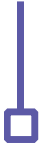
RÚBRICA DE EVALUACIÓN PARA “Máximos y mínimos en funciones cúbicas”

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: 4° \_\_\_\_\_

Dimensiones y criterios	Nivel 4: Excelente (4 puntos por criterio)	Nivel 3: Bueno (3 puntos por criterio)	Nivel 2: Suficiente (2 puntos por criterio)	Nivel 1: Insuficiente (1 punto por criterio)
<b>1. Cooperación individual</b>	Participó en las nueve actividades que permitieron lograr los propósitos planteados: (1) Llevó recortado su cuadrado, (2) tenía todos los materiales solicitados, (3) armó correctamente su caja, (4) calculó el volumen, (5) lo anotó en el pizarrón, (6) elaboró su tabla numérica y (7) su gráfica. (8) Participó activamente en los cálculos iniciales para elaborar la segunda caja (9) Colaboró con su equipo para la armar la segunda caja.	Participó en siete u ocho de las nueve actividades que permitieron lograr los propósitos planteados: (1) Llevó recortado su cuadrado, (2) tenía todos los materiales solicitados, (3) armó correctamente su caja, (4) calculó el volumen, (5) lo anotó en el pizarrón, (6) elaboró su tabla numérica y (7) su gráfica. (8) Participó activamente en los cálculos iniciales para elaborar la segunda caja (9) Colaboró con su equipo para la armar la segunda caja.	Participó en seis o siete de las nueve actividades que permitieron lograr los propósitos planteados: (1) Llevó recortado su cuadrado, (2) tenía todos los materiales solicitados, (3) armó correctamente su caja, (4) calculó el volumen, (5) lo anotó en el pizarrón, (6) elaboró su tabla numérica y (7) su gráfica. (8) Participó activamente en los cálculos iniciales para elaborar la segunda caja (9) Colaboró con su equipo para la armar la segunda caja.	Participó en cinco o menos de las nueve actividades que permitieron lograr los propósitos planteados: (1) Llevó recortado su cuadrado, (2) tenía todos los materiales solicitados, (3) armó correctamente su caja, (4) calculó el volumen, (5) lo anotó en el pizarrón, (6) elaboró su tabla numérica y (7) su gráfica. (8) Participó activamente en los cálculos iniciales para elaborar la segunda caja (9) Colaboró con su equipo para la armar la segunda caja.
<b>2. Organización</b>	Mostró orden con sus materiales en la actividad individual. En el equipo mostró orden y planeación desde el inicio de la actividad.	En lo individual o en el equipo demoró alrededor de 5 minutos en comenzar a realizar la actividad.	En lo individual o en el equipo demoró alrededor de 10 minutos en comenzar a realizar la actividad.	En lo individual o en el equipo tardó más de media hora en comenzar a realizar la actividad.
<b>3. Corresponsabilidad</b>	El 100% de estudiantes estuvieron participando activamente (respondiendo preguntas y apoyaron a sus compañeros en dudas).	Al menos el 75% de estudiantes estuvieron participando activamente.	Al menos el 50% de estudiantes estuvieron participando activamente.	Menos del 50% de estudiantes estuvieron participando activamente.
<b>4. Producto</b>	Cumple con. Caja 1: Nombre de estudiante, valor de x, volumen, tabla numérica, gráfica.	No cumple un elemento de. Caja 1: Nombre de estudiante, valor de x, volumen, tabla numérica, gráfica.	No cumple dos elementos de. Caja 1: Nombre de estudiante, valor de x, volumen, tabla numérica, gráfica.	No cumple tres o más elementos de. Caja 1: Nombre de estudiante, valor de x, volumen, tabla numérica, gráfica.
	Cumple con Caja 2: Nombre de estudiantes, función, volumen, tabla numérica, gráfica, elaborada con material de reúso.	Cumple con un elemento Caja 2: Nombre de estudiantes, función, volumen, tabla numérica, gráfica, elaborada con material de reúso.	Cumple con dos elementos Caja 2: Nombre de estudiantes, función, volumen, tabla numérica, gráfica, elaborada con material de reúso.	Cumple con tres o más elementos Caja 2: Nombre de estudiantes, función, volumen, tabla numérica, gráfica, elaborada con material de reúso.
<b>TOTAL</b>				





# 7

## Fuentes de información

Alonso, C., Gallego, D. y Honey, P. (1994). *Los estilos de aprendizaje*. Bilbao, España: Mensajero.

Corte, R.M. (2010). *Inteligencia creadora: arte y creatividad en la educación*. México, Distrito Federal: Trillas.

García, G. J. (1998). La creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo. *Educación y pedagogía*, (21). Consultado en septiembre, 17, 2012 en <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/6758/6191>

Dirección General de Bachillerato. (2010). *Documento base del Bachillerato General*. Consultado en octubre, 20, 2012 en [http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion\\_academica/pdf/Doc\\_Base\\_Mar\\_2012\\_Rev01.pdf.pdf](http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/pdf/Doc_Base_Mar_2012_Rev01.pdf.pdf)

Lozano, R. A. (2000). *Estilos de aprendizaje y enseñanza*. México: Trillas.

Mochón, S. (2000). *Modelos matemáticos para todos los niveles*. México: Iberoamérica.

Pimienta, P.J. (2005). *Metodología constructivista. Guía para la planeación docente*. Estado de México, México: Pearson.

VARC (2017). *A guide to learning styles*. Cuestionario recuperado de: <http://vark-learn.com/>



**Prácticas Innovadoras**  
en educación básica y media superior

Dirección de Innovación y Proyectos Especiales  
Dirección General de Investigación e Innovación

